Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade

Ana Isabel Silvestre
anaisabel.silvestre@sapo.pt
Escola EB 2,3 de Gaspar Correia, Portela
João Pedro da Ponte
jpponte@fc.ul.pt
Departamento de Educação,
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Resumo
Este estudo analisa o modo como se desenvolve a aprendizagem da proporcionalidade directa em alunos do 6.º ano de escolaridade (11-12 anos), no quadro de uma unidade de ensino que dá ênfase a actividades de investigação e resolução de problemas em situações contextualizadas e recorre ao uso da planilha. O seu objectivo é saber: (a) se os alunos distinguem situações de proporcionalidade directa de situações onde tal relação não existe, (b) quais os sistemas de representação que utilizam e (c) que tipo de estratégias usam na resolução de tarefas envolvendo proporcionalidade. O estudo foi desenvolvido numa turma do 2.º ciclo em que a primeira autora leccionou durante dois anos, constituindo uma investigação sobre a sua prática profissional. Foi seguida uma metodologia de investigação qualitativa baseada em estudos de caso. A unidade de ensino foi desenvolvida em 10 aulas (de 90 minutos) e tem por base um conjunto de tarefas inspiradas no livro *Uma Aventura no Palácio da Pena*. A recolha de dados envolveu a elaboração de um diário de aula, a obtenção de cópias dos produtos escritos pelos alunos, bem como entrevistas efectuadas individualmente a três alunos, que constituíram a principal fonte de dados. Os resultados mostram que, de um modo geral, os alunos distinguem situações em que existe uma relação proporcional daquelas em que tal relação não existe, e mostram-se capazes de mobilizar o conhecimento adquirido ao longo da realização da unidade de ensino. A identificação de regularidades dentro e entre grandezas é a estratégia usada para verificar a existência de proporcionalidade directa. Este procedimento está vinculado às tarefas de natureza investigativa e exploratória e pelo uso da folha de cálculo. Os alunos revelam preferência por tabelas para representar os dados, tendo em vista não só organizá-los mas também interpretar os problemas. Na resolução de problemas, dado o reconhecimento de regularidades entre e dentro de grandezas, os alunos desenvolvem estratégias multiplicativas próprias, tanto de natureza escalar (equivalência entre razões ou factor escalar) como funcional (razão unitária).

Palavras-chave: Raciocínio proporcional. Actividades de investigação. Resolução de problemas. Novas tecnologias. Representações. Estratégias.

Investigation tasks and new technologies in teaching proportion

Abstract
This study analyzes how grade 6 students (11-12 years) learn proportional reasoning from a teaching unit based on contextualized investigation and exploratory tasks and problems and using a spreadsheet. The aim is to know (a) if the students distinguish the situations in which there is proportion from the situations in which this relation does not exist, (b) what representation systems they use, and (c) what strategies they adopt to solve proportion problems. This study was developed in a class in which the first author was the mathematics teacher during grades 5 and 6, thus representing an investigation about her professional practice. The study followed a qualitative methodology based on case studies. This teaching unit was developed in 10 lessons (of 90 minutes) and is based on a collection of tasks inspired on the book *An Adventure at Pena's Palace*. Data collection involved the elaboration of a teacher's journal, copies of students' writen documents, as well as interviews with three students, that are the main source of data. The results show that, in general, the students distinguish situations were there is a proportional relationship from the situations in which such relationship does not exist. They identify regularities within and between quantities to verify the existence of proportion. This procedure is associated to investigation and exploration tasks and to the use of the spreadsheet. The students prefer to use tables as representations because they think that is a good structure to organize data and allows a better understanding of the problems. To solve proportion problems they developed their own multiplicative strategies, either scalar strategies (equivalence between ratios strategy or scalar factor) or functional strategies (unit ratio).
Key words: Proportional reasoning. Investigation activities. Problem solving. Information and Communication Technologies. Representations. Strategies

Introdução

O conceito de proporcionalidade é fundamental dentro e fora da Matemática. Por exemplo, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) consideram-no importante para lidar com situações do mundo real, no estudo de várias áreas do saber e para o desenvolvimento cognitivo do aluno. Por outro lado, Lesh, Post e Behr (1988) indicam que este conceito tanto constitui o culminar da Matemática elementar como representa o alicerce da Matemática dos anos seguintes, referindo que a sua aprendizagem deve ser vista como um dos principais objectivos do ensino desta disciplina.

Esta investigação tem como objectivo estudar o desenvolvimento da aprendizagem da proporcionalidade nos alunos de uma turma da 6.ª série[1], no quadro de uma proposta pedagógica que dá ênfase a actividades de investigação e a problemas contextualizados

[1] Designada em Portugal por 6.º ano do ensino básico.

em situações “realísticas” (GRAVEMEIJER, 2005) e recorre ao uso da planilha. Especificamente, procuramos responder às seguintes questões:

- Os alunos distinguem situações de proporcionalidade directa de situações onde tal relação não existe? Que processos (informais ou formais) usam para identificar relações proporcionais?
- Que sistemas de representação usam os alunos para registar os dados? O que os leva a optar por um ou outro sistema? Os alunos convertem dados de um sistema para outro?
- Que estratégias os alunos usam para resolver um problema de proporcionalidade? O que os leva a optar por uma ou outra estratégia?

A investigação segue uma abordagem de investigação qualitativa e é baseada em estudos de caso de alunos. A recolha de dados decorreu no ano lectivo de 2004/05, incidindo sobre uma turma, particularmente em três dos seus alunos. As entrevistas efectuadas individualmente a esses alunos constituíram a principal fonte de dados, mas também foram usados os registos produzidos pelos alunos, o diário de aula da professora e a folha de auto-avaliação dos alunos. Uma vez que este estudo foi desenvolvido numa turma leccionada pela primeira autora, trata-se de uma investigação sobre a sua prática profissional (PONTE, 2002).

O desenvolvimento do raciocínio proporcional

O raciocínio proporcional tornou-se alvo de intenso estudo depois de Inhelder e Piaget terem teorizado que ele é a marca distintiva do estádio formal de desenvolvimento da inteligência humana (TOURNIAIRE; PULOS, 1985). Desde então, muitos estudos têm sido desenvolvidos sobretudo por investigadores da Educação Matemática e da Psicologia tendo em vista conhecer como é que as crianças e jovens raciocinam proporcionalmente num conjunto variado de tarefas, assim como conhecer como é que os factores desenvolvimento e/ou instrução influenciam o raciocínio proporcional (e.g., KARPLUS; PULOS; STAGE, 1983; LAMON, 1993; LO; WATANABE, 1997; NOELTING, 1980; POST; BEHR; LESH, 1988).

Várias investigações têm contribuído para destacar diversos aspectos do raciocínio proporcional. Lesh, Post e Behr (1988) referem que este raciocínio envolve pensamento de natureza holística relacionando duas expressões racionais (taxa, razão, quociente ou fracção), abrangendo a necessária invariabilidade na apropriação e síntese mentais dos vários termos destas expressões e uma aptidão para inferir sobre a igualdade ou desigualdade de pares ou séries dessas expressões, bem como a habilidade de produzir com sucesso as componentes omissas, independentemente dos aspectos numéricos do problema. Pelo seu lado, Behr, Harel, Post e Lesh (1992) referem, ainda, a necessidade de compreensão e a capacidade de utilização de estruturas multiplicativas. Post, Cramer, Harel, Kieren e Lesh (1988) referem que uma pessoa capaz de pensar proporcionalmente revela uma flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens aos problemas sem ser afectado pelos seus dados numéricos e contexto. Deste modo, deve ser capaz de distinguir relações proporcionais daquelas em que tal relação não existe. Por outro lado, Singer, Kohn e Resnick (1997) mencionam dois requisitos fundamentais para a existência de um verdadeiro raciocínio proporcional: (i) a mudança da atenção das relações aditivas para as relações multiplicativas entre os números; (ii) a habilidade para pensar fluentemente dentro e entre espaços de medida, ou seja, realizando raciocínios escalares e funcionais.

Para Resnick e Singer (1993), as crianças constroem o raciocínio proporcional e o conceito de razão de modo intuitivo, com base na sua experiência diária. As autoras afirmam que "as primeiras habilidades para raciocinar não numericamente sobre relações entre quantidades físicas fornecem à criança esquemas relacionais que esta pode vir a aplicar para quantificar numericamente os materiais e, mais tarde, os números como objectos matemáticos" (RESNICK, SINGER, 1993, p. 109). As autoras consideram que o conhecimento que as crianças constroem com base na sua experiência diária tem um carácter intuitivo. Designam por *esquemas protoquantitativos* os raciocínios que elas realizam à margem da quantificação numérica. Na sua perspectiva, a utilidade destes esquemas não se limita ao estádio de desenvolvimento pré-matemático mas continua ao longo da vida. As autoras afirmam que estes raciocínios mantêm-se mesmo quando as crianças sabem contar correctamente em situações de comparação, acréscimo e decréscimo e em relações parte:todo.

Resnick e Singer (1993) desenvolveram também a hipótese de que o conhecimento sobre como relacionar quantidades resulta contingentemente da experiência física e linguística, e leva à formação de esquemas relacionais protoquantitaivos. Numa fase posterior, estes esquemas já quantificados suportam o raciocínio sobre relações numéricas, em vez de simples relações entre quantidades materiais. As autoras referem dois tipos de relação entre quantidades físicas sobre as quais as crianças pequenas parecem ser capazes de raciocinar correctamente: (i) a relação de ajustamento – razão externa protoquantitativa (externa porque envolve dois espaços de medida) – corresponde à ideia de que as "coisas" caminham paralelamente porque os seus tamanhos são apropriados um para o outro; e (ii) a relação de covariância – proporção interna qualitativa (interna porque envolve um só espaço de medida). Colocam também a hipótese da compreensão destas relações ser a base do raciocínio protoquantitativo sobre as relações numéricas (razões). A análise dos processos de estabelecimento de relações entre duas séries numéricas de material quantificado, levou as autoras a identificar o raciocínio que designam “protorazão”, que faculta muitas vezes a resolução correcta de problemas envolvendo razões sem que o objecto mental “relação numérica” tenha sido construído.

Contudo, quando as crianças começam a quantificar as situações, na resolução de problemas sobre relações proporcionais, aparentemente abandonam os seus esquemas protoquantitativos e utilizam estratégias aditivas. Na perspectiva de Resnick e Singer (1993), esta situação, repetidamente verificada pela investigação, pode resultar do lento desenvolvimento das relações multiplicativas protoquantitativas comparativamente às relações aditivas protoquantitativas. No entanto, esta situação pode também ter origem em um desfasamento temporal, isto é, quando os alunos começam a quantificar os seus esquemas protoquantitativos (ajustamento e covariância) “sabem muito mais sobre as propriedades de composição aditiva dos números do que sobre as suas propriedades de composição multiplicativa (factorização)” (p. 124). As investigadoras destacam que, desde os primeiros anos da escola primária, as crianças devem ter experiências de aprendizagem que lhes permitam o uso de estratégias de *protorazão* e outras experiências que lhes facilitem o conhecimento das estruturas multiplicativas.

Num outro estudo, Lamon (1993) investigou as funções cognitivas e metacognitivas dos alunos da 6.ª série quando resolvem problemas sobre razões e proporções antes de estes assuntos serem leccionados na escola. Segundo a investigadora, os alunos revelam ter um conjunto alargado de conhecimentos prévios que lhes permite efectuar extensões de modo a resolverem problemas complexos. Este resultado também se aplica à resolução de problemas sobre razões e proporções, na medida que várias das crianças entrevistadas, segundo diz, “mostraram ter um reportório de estratégias poderosas ao seu dispor” (LAMON, 1993, p.150). A autora encontrou uma forte componente metacognitiva mesmo antes dos temas razão e proporção serem abordados em contexto escolar, pois, como refere, “as crianças revelaram uma marcada habilidade para monitorizar e julgar a fiabilidade do seu pensamento” (*Idem*, p.143). Acrescenta ainda que vários “alunos tomaram decisões sobre a adaptabilidade das unidades e representações, da eficiência das suas estratégias e da razoabilidade das suas respostas” (*Idem*, p.151). Assim, a investigadora considera que as funções cognitivas e metacognitivas já estão desenvolvidas antes do ensino escolar, salientando a importância de o professor identificar o nível de compreensão dos seus alunos para melhor decidir sobre o trabalho a desenvolver, tendo em conta o conhecimento que os alunos já revelam. Refere ainda a importância de se estimular o desenvolvimento em simultâneo de estratégias cognitivas e metacognitivas.

Estas perspectivas sobre o raciocínio proporcional salientam que não se trata apenas de estudar o desempenho dos alunos em tarefas de maior ou menor complexidade. Pelo contrário, é preciso atender ao significado matemático do conceito de proporcionalidade (estrutura, invariância e equivalência ou não equivalência sob uma variedade de diferentes transformações) e é preciso dar atenção ao modo como as crianças constroem o seu conceito de razão e o seu raciocínio proporcional, com base na sua experiência fora e dentro da escola.

Proposta pedagógica

A proposta pedagógica desenvolvida neste trabalho procura apresentar uma alternativa à aprendizagem baseada na memorização de procedimentos que, como dizem Lesh, Post e Behr, leva "os alunos a resolverem problemas de proporcionalidade sem raciocinarem proporcionalmente" (1988, p.2). Uma estratégia de ensino alternativa, que podemos designar de exploratória (PONTE, 2005), consiste em levar os alunos, através da exploração de situações abertas, a estabelecer as suas estratégias próprias para resolver problemas de proporcionalidade. Assim, a proposta pedagógica construída neste estudo teve por base três ideias fundamentais: (i) ênfase em tarefas exploratórias e investigativas e problemas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003), (ii) a sua contextualização situações "realísticas" (GRAVEMEIER, 2005), em especial um livro de ficção, e (iii) e o uso de tecnologia, recorrendo à planilha Excel (PONTE, 1995). A planilha constitui uma ferramenta que permite aos alunos a rápida descoberta de regularidades entre os dados envolvidos nos problemas, para além de levar os alunos a prestar especial atenção ao modo de organizar os próprios dados. A planilha é uma óptima ferramenta de trabalho para as tarefas de investigação/exploração apresentadas e esta unidade de ensino constituiu a primeira oportunidade dos alunos para a usarem no seu trabalho. Além disso, os alunos usaram também nesta unidade a calculadora elementar, na sequência do que faziam nas aulas anteriores, para realizar cálculos repetitivos ou como ajuda a validar respostas obtidas por outras formas. A presente proposta pedagógica enquadra-se assim nas orientações de dois documentos curriculares, o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001) e os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) e baseia-se também na experiência docente da primeira autora.

A concretização desta proposta pedagógica e a sua avaliação foram feitas numa unidade de ensino que ocupou dez blocos de 90 minutos cada (ver Quadro 1) leccionados durante o 2º período escolar. A tarefa “Subida à Pena”, proposta em duas partes, marca decisivamente a unidade, tendo ocupado 4 blocos e meio. A primeira parte da tarefa pretende levar os alunos a explorar situações e reconhecer a existência de regularidades entre os dados fornecidos (a obter por exemplo através da divisão). A segunda parte pretende levar os alunos a explorar situações criadas por si próprios para compreenderem a natureza multiplicativa da relação entre os valores de grandezas directamente proporcionais. Outro objectivo é identificar as características dos gráficos gerados por essas grandezas, como se pode ver no quadro 1 da próxima página.

As tarefas 3, “Mais problemas”, e 4, “Eu tenho razão”, contêm um conjunto de problemas em que o enunciado é complementado por informação apresentada em tabelas, gráficos ou esquemas. O seu objectivo é desenvolver a capacidade de resolver problemas simples envolvendo proporcionalidade e compreender o uso dos termos “razão” e “proporção” no contexto dos problemas. A tarefa 5. “Uma ponte de esparguete”. tem uma componente experimental e visa envolver os alunos numa actividade investigativa. O seu objectivo é levá-los a desenvolver a capacidade de reconhecer se, numa dada situação, existe ou não uma relação proporcional. A tarefa 6, “As aparências iludem”, apresenta um conjunto de problemas cujo objectivo é levar os alunos a reconhecer a escala como razão e aprofundar o conceito de proporção, utilizando-o na resolução de problemas. A tarefa 7, “Descobrir o Parque da Pena”, proposta para trabalho de casa, apresenta exercícios e problemas sobre razão e proporção e tem objectivos idênticos às tarefas 3 e 4. E, finalmente, a tarefa 8, “Eureka! Já descobri o monstro”, tem uma componente experimental e foi também proposta para trabalho de casa. Visa envolver os alunos numa actividade exploratória com o objectivo levar os alunos a ser capazes de representar a percentagem como razão, utilizar o conceito de proporção na resolução de problemas sobre percentagem e estabelecer conexões com temas já leccionados.

Blocos (90 min.)	1-2-3-4ª	4B-5A	5B-6A	6B	7	8	9	10
Tarefa	1. Subida à Pena 1.ª parte (exploração/ investigação)	2. Subida à Pena 2.ª parte (exploração/ investigação)	3. Mais problemas (problemas apresentados em texto com tabelas, gráficos e esquemas)	4. Eu tenho razão (problemas apresentados em texto com tabelas, gráficos e esquemas) + Descobrir o Parque da Pena (TPC)	Exercícios e problemas	5. Uma ponte de esparguete (investigação com uma componente experimental) + Eureka! Já descobri o monstro (TPC)	6. As aparências iludem (problemas)	Teste de avaliação
Competência matemática	Aspectos visados: - Reconhecimento de situações de proporcionalidade directa e aptidão para usar raciocínio proporcional em problemas diversos. - Aptidão para trabalhar com percentagens e para compreender e utilizar as suas diferentes representações.							
Objectivos Específicos	- Investigar relações entre números e reconhecer situações de proporcionalidade directa.	- Explorar relações e manipular números em relações proporcionais. - Construir	- Resolver problemas simples que envolvem o conceito de proporcionalidade directa. - Compreender os	- Resolver problemas simples que envolvem o conceito de proporcionalidade directa. - Compreender os	- Esclarecimento de dúvidas (Nota: Aula	- Distinguir situações de proporcionalidade de situações em que tal relação não existe utilizando argumentos	-Desenvolver o conceito de proporção, utilizando na resolução de problemas - Interpretar uma escala.	

Em todas as aulas em que se concluiu uma tarefa foi fornecida uma folha de auto-avaliação a cada aluno com o objectivo de saber o que ele compreendeu e que dificuldades sentiu. Esta folha foi preenchida em casa e entregue na aula seguinte, constituindo um momento de reflexão pessoal. Para a avaliação de conhecimentos específicos e atendendo aos critérios de avaliação da escola, foram considerados dois relatórios escritos produzidos em grupo durante a aula (os dois melhores dos três realizados) e um teste de avaliação. Esse teste, realizado individualmente, é constituído por uma parte em papel e outra parte em computador (Excel), tendo os alunos calculadoras disponíveis como habitualmente. Para a avaliação dos alunos na unidade contribuíram ainda a sua atitude e empenho, a concretização da tarefa, a realização do trabalho de casa e a participação de acordo com os parâmetros definidos pela escola.

Desenvolvimento das aulas[2]

Na aula que antecedeu o início da experiência foram analisados com os alunos dois documentos com orientações para o trabalho em grupo e para a elaboração de relatórios. Embora os alunos já tivessem feito este tipo de trabalho, considerei pertinente voltar a discutir alguns aspectos em que muitos deles têm dificuldade, nomeadamente a importância de partilhar e discutir as ideias, de as escrever e de negociar as decisões. Formei ainda três grupos de quatro e três grupos de três alunos. Na constituição dos grupos procurei misturar alunos e alunas de diferentes níveis de desempenho matemático e tive em atenção os seus pedidos relativamente a colegas com quem gostam de trabalhar. Requisitei a sala de computadores para todas as aulas de Matemática a leccionar durante a unidade de ensino.

Nesta experiência, cada tarefa ocupou uma ou várias aulas. Cada tarefa começava com uma breve informação da professora aos alunos sobre o que iriam fazer, o tempo previsto para efectuar a tarefa e o suporte em que iria ser entregue o trabalho realizado. Depois de os alunos efectuarem a tarefa, a professora avaliava os registos produzidos. No momento da entrega do trabalho um dos grupos fazia uma apresentação, a que se seguia uma discussão moderada, em regra, pela professora.

O início (aula 1). Comecei por relembrar algumas recomendações anteriores, em particular a cooperação no trabalho, a descrição pormenorizada das ideias e dos procedimentos do grupo, bem como a importância de responder às questões com clareza. Lembrei que a ida para a sala de computadores só aconteceria quando cada

---

[2] Esta descrição é feita na primeira pessoa por Ana Isabel Silvestre e tem por base o seu diário de aula e os documentos produzidos pelos alunos.

grupo tivesse discutido o problema e tivesse uma estratégia de trabalho, para evitar que se precipitassem para o computador sem pensar no que iriam fazer. Enquanto isto, Catarina, que era neste dia a responsável pela sala, distribuiu as tarefas.

Em dois grupos, um aluno leu para os colegas e nos restantes cada aluno leu para si o enunciado da tarefa. Quando passaram à análise do mapa, a maioria dos alunos de cada grupo já conversava entre si. Havia alguma agitação sobre a necessidade de escrever o que cada elemento dizia e tive de acalmar alguns grupos em que se manifestava ansiedade relativamente a quem registava os acontecimentos e ao que era importante escrever.

Os grupos identificaram as grandezas que intervêm na situação (distância e tempo) e procuraram descrever o fenómeno velocidade, designando-o de “rapidez” ou “ritmo”. Numa primeira abordagem aos acontecimentos, as grandezas distância e tempo apareceram num conjunto de conjecturas de circunstância, baseadas no perfil das personagens e no contexto do problema da subida da serra, carregadas de fantasia e imaginação infantil (por exemplo, “o personagem tinha medo de fantasmas”, “o Faial correu atrás de um pássaro”, etc.). Estas conjecturas também reflectiam a experiência dos alunos, uma vez que os argumentos a utilizar não eram explicitados na tarefa.

Progressos e dificuldades. Passados 30 minutos, os alunos do grupo de Dinis pediram para ir para a sala de computadores. Interpelei-os sobre o estado do trabalho e Sara explicou que tinham de optar por uma das suas suposições feitas com base nos dados, seguindo então para a sala de computadores. A meio da aula, já todos os grupos estava a trabalhar no Excel. Dois deles pareciam inseguros e com dificuldade em gerir o trabalho e chegar a consensos. O grupo de Dinis foi o que mais avançou e os alunos que o integravam revelavam muita vivacidade e empenho. Fiquei algum tempo a observá-los e notei que: (i) quando estruturam os dados no computador abandonam as conjecturas de circunstância misturadas com imaginação e centram-se nas conjecturas que envolvem as duas grandezas (distância e tempo); (ii) a explicitação das grandezas parece ter contribuído para a escolha das operações para relacionar os dados (multiplicação e divisão), uma vez que não identificam a velocidade como a razão entre a distância e o tempo; (iii) a estrutura dos dados numa tabela permite uma rápida comparação dos valores e os alunos claramente encontram uma invariância numa das tabelas, à qual associam um “mesmo ritmo” ou um “mesmo passo” (constante de proporcionalidade); e (iv) mesmo apresentando as tabelas como suporte da sua investigação, parecem ter tido a necessidade de justificar esses resultados através da sua representação como razão – que designam como “fracção”, estabelecendo uma conexão com outro tema do programa.

A maioria dos grupos avançou com lentidão. Os alunos levaram algum tempo a representar os dados no computador, discutiam sobre o tipo de tabela a construir (horizontal ou vertical) e cometiam bastantes enganos na designação das células quando escreviam na linha de comando, havendo logo uma série de mãos a querer escrever em simultâneo no computador para emendar o erro. Quando faltavam 10 minutos para terminar a aula, apontei a necessidade de guardar a informação nas disquetes e de imprimir o trabalho já realizado.

Discussões entre os alunos (aula 2). Havia conversas entre os elementos dos diferentes grupos sobre a tarefa iniciada e partilhavam ideias sobre a apresentação dos registos feitos na aula anterior. Rosa pediu a disquete do seu grupo. Entreguei a caixa e ela distribuiu as disquetes pelos diversos grupos. Quando autorizei a ida para a sala de computadores, os grupos desapareceram rapidamente sem confusão.

Passados 30 minutos desde o início da aula, os alunos falavam alto. Tomar decisões parece envolver grandes discussões. O grupo de João chamou-me porque não conseguia chegar a consenso sobre se era mais eficiente representar os dados em tabelas horizontais ou verticais (os alunos já tinham experimentado das duas maneiras). Dois alunos argumentavam que a tabela horizontal permitia uma melhor visualização dos dados, enquanto os outros dois diziam que a leitura é facilitada nas tabelas verticais. Respondi que eram eles que tinham de tomar a decisão em função da sua resposta.

Razão constante. Três grupos tentavam agora explicar o significado, no contexto do problema, da existência de uma razão (velocidade) constante no caso do personagem Pedro e da não existência dessa regularidade no caso do personagem João. Alunos dos grupos de Dinis e Guilherme conversavam entre si. Este último dizia que o valor obtido pela divisão da distância pelo tempo dava a “rapidez”, justificando que é “como nos carros, só que aqui é metros por minuto e nos carros é quilómetros por hora”. Dinis concordou mas disse não perceber porque é que obtiveram uma razão constante com os dados do personagem Pedro e isso pareceu intrigá-lo. Guilherme apontou para o ecrã e explicou aos colegas algumas relações (dobro, triplo etc.) que observou nos dados. A maioria dos grupos concordou que a razão entre a distância e o tempo dava a velocidade com que os personagens se deslocam no terreno. É a manutenção de uma velocidade constante por parte do Pedro que lhe permite chegar mais depressa ao fim do percurso.

Elaboração dos relatórios. A maioria dos grupos estava atrasada relativamente ao que eu tinha previsto e senti que não iam conseguir concluir o relatório nesta aula. Passei pelos grupos e reforcei a necessidade de registarem o que estavam a fazer, pois pareceu-me que começavam a descurar essa parte da tarefa. Dois grupos reclamaram dizendo que era difícil anotar tudo o que se faz e diz. Aconselhei-os a fazer pausas durante o trabalho para escreverem em grupo uma ou duas frases que sintetizassem o que estavam a fazer.

Passados 60 minutos desde o início da aula, Rafaela pediu para entregar o relatório na aula seguinte porque o grupo ainda não tinha escrito “nada de jeito”. Os outros grupos manifestaram-se no mesmo sentido. Acedi porque queria que o relatório fosse feito durante a aula e não me interessava ter trabalhos pouco elaborados ou que não traduzissem a experiência dos alunos.

Representações gráficas. Os grupos responderam rapidamente à segunda questão. Sara, aluna com fraco desempenho na disciplina, estava muito entusiasmada a trabalhar no computador, iniciando com os colegas do grupo a escrita do relatório. Rosa perguntou se podiam “ver como é que isto fica num gráfico” à semelhança do trabalho realizado no ano lectivo anterior, no tema da Estatística. Disse que sim, embora a construção de gráficos com dados de relações proporcionais não estivesse prevista na tarefa. Dinis puxou de imediato o teclado no sentido de construir os gráficos, embora Sara não quisesse largar o rato do computador. Rosa, no entanto, colocou alguma ordem no grupo. A ideia de representar os dados em gráfico desafiou também os grupos de Guilherme e Ana e iniciou-se uma nova discussão entre os grupos sobre o tipo de gráfico que melhor representa os dados.

Disse aos alunos que faltam 10 minutos para terminar a aula e, por isso, deviam gravar o trabalho e preceder à impressão do material. Os grupos que estavam a explorar as possibilidades gráficas não prestaram atenção e continuaram:

Rosa: Vai, “clica” neste.

Dinis: Não é este [tipo de gráfico]. Este é de barras.

Sara: É este. Este dá.

Dinis: Não. Hum… Oh Pedro (Pedro está a trabalhar com o seu grupo e não lhe responde). Rita. Ei… Rita, que gráfico fizeram?

Rafaela: (Sorri e abana negativamente a cabeça)

Rosa: (Faz uma careta à colega). Olha, vamos fazer todos os que dêem!

Dinis: Ó stora, chegue aqui. (Aproximo-me) Qual é o gráfico que é melhor?

Professora: Melhor? Deixa ver o que fizeram. (Um gráfico de linhas está no ecrã) Será que o rapaz está aqui aos 200 metros desde os 0 aos 14 minutos?

> **Dinis**: (O grupo da Rafaela quer ver o gráfico construído pelo grupo de Dinis, levantam-se e aproximam-se do ecrã deste grupo) Não. Ele passa aos 200 metros e marca 14 minutos.
>
> **Guilherme**: (Sorri). Eh pá. Então é só o fim dessa linha que interessa, o ponto, iá o ponto que está no fim da linha. É um gráfico com pontos que dá.

Esta aula foi muito rica em termos de discussão e de explorações numéricas. O envolvimento dos alunos foi maior que na aula anterior. Ao saberem que teriam mais uma aula para fazerem o relatório, a sua atenção deixou de se centrar exclusivamente na escrita de uma resposta e tentaram encontrar justificações numéricas para a regularidade encontrada. Outros grupos exploraram ainda a representação gráfica. Ter dado mais uma aula para a realização deste trabalho pareceu-me ter sido uma boa decisão.

Entrega dos relatórios (aula 3). Os alunos do grupo de Dinis pediram logo para ir para a sala de computadores, solicitando a sua disquete, pois queriam redigir o relatório no computador. Os restantes alunos arrumaram as mesas em grupo e organizaram os seus materiais. Entretanto, o grupo de Joana pediu para escrever o relatório no computador, o que não estava previsto. Anui, porque diziam que assim lhes era mais fácil alterar os textos que não estivessem bem e porque todos os alunos tinham computador em casa. O grupo acabou por se subdividir e utilizou dois computadores para concluir o relatório. Estavam quatro grupos a trabalhar na sala de aula e dois na sala de computadores. Confiei na turma e esperei que o bom senso da maioria dos alunos fizesse com que algum deles me viesse procurar caso ocorresse algum problema.

O grupo de João revelou alguma dificuldade em organizar os rascunhos e as folhas com as tabelas construídas no Excel. Tirei da pasta um exemplar do guião para a elaboração de um relatório, já analisado na aula, e acenei na direcção do grupo. Um dos alunos retirou do dossier o seu exemplar e todos se precipitaram para o documento, apesar dos protestos de Dário.

Passados 30 minutos desde o início da aula, estava na sala de Informática onde o ambiente era animado. Os alunos dos dois grupos discutiam pormenores organizacionais e estéticos do seu documento. Rosa, Dinis e Rafaela, embora pertencentes a grupos diferentes, discutiam, em tom alterado. Tive de insistir duas vezes para se moderarem. Discutiam, no contexto da tarefa, a questão da previsibilidade, isto é, as condições que permitem fazer previsões do tempo gasto para percorrer uma determinada distância.

Voltei para a sala de aula onde os alunos conversavam num tom de voz mais alto. Havia vários materiais espalhados nas mesas (lápis de cor, agrafadores, folhas coloridas, réguas). Ana discutia com Joana, que tinha uma calculadora na mão. Parecia que Ana não conseguia perceber por que motivo encontrava uma razão constante quando dividia as duas grandezas, uma vez que os valores mudavam. Debruçou-se sobre a calculadora e escreveu numa folha já rabiscada e cheia de números.
Faltavam cerca de 20 minutos para terminar a aula e o grupo de Dinis foi o primeiro a concluir o relatório, com grande satisfação. Entreguei-lhes a folha de auto-avaliação pois ainda tinham tempo de a preencher até ao final da aula. Aos poucos, recebi todos os relatórios. Antes de saírem, pedi aos alunos para trazerem as folhas de auto-avaliação na próxima aula e lembrei que no início teríamos a discussão dos relatórios. A demora na realização desta tarefa podia ser em parte justificada pela necessidade da escrita pormenorizada do trabalho em grupo e pelo facto dos alunos estarem envolvidos numa investigação.
A discussão (aula 4). Comecei a aula com uma apreciação global do trabalho desenvolvido pelos alunos, salientando o seu empenho e a qualidade do trabalho escrito da maioria dos grupos. Lembrei a necessidade de trabalharem com maior celeridade, fazendo pausas para elaborarem em conjunto o texto e evitando a dispersão do trabalho pelos registos individuais de cada um dos elementos do grupo. Informei que anexei uma folha com comentários a cada um dos relatórios que deviam ser tidos em conta nos próximos trabalhos. Rui distribuiu os relatórios. Rosa pediu tempo para o grupo poder ver as minhas observações. O delegado de turma ajudou-me a realizar o sorteio do grupo que iria gerir a discussão do trabalho, o que coube ao grupo de Rafaela.
Os alunos começaram por explicar o que pensaram para iniciar a sua investigação. Tomás explicou que "não sabíamos nada de que 'coisa' é que o Pedro e o João tinham dito ao Chico no fim do caminho" mas acreditavam que "era um resultado com Matemática que tínhamos que descobrir". O grupo revelou depois que não sabia o que fazer com os dados do mapa até os organizar na planilha. Os alunos justificaram a sua escolha da tabela vertical porque foi desse modo que organizaram os dados nos trabalhos de Estatística. Um grupo argumentou a favor da disposição dos dados numa tabela horizontal e outro afirmou que é indiferente ser de um ou outro modo. Rosa, que não pertencia ao grupo que estava a gerir a discussão, pediu para desenhar os dois tipos de tabela no quadro. Não surgiu consenso sobre a melhor representação, embora a aluna argumentasse sobre a facilidade em ler os pares numéricos na tabela vertical, referindo "este está para este, este para este". Tendo a oportunidade de confrontar as duas tabelas, a maioria dos alunos concordou com Rosa.

Relacionar os dados. Foi a vez de Rafaela dizer como relacionaram os dados das grandezas distância e tempo. Referiu que ainda pensaram em “somar todas as distâncias e todos os tempos, mas isso não tinha lógica”. Segundo disseram, tentaram depois relacionar a distância e o tempo de cada “meta” para os dois personagens e, por isso, construíram a tabela “João” e “Pedro”. Tomás tomou a palavra e disse que no seu grupo viram logo que não podiam usar a adição nem a subtracção, porque estavam envolvidas duas grandezas diferentes. Por isso, para relacionar os dados, só restavam a multiplicação e a divisão. Guilherme pediu para falar e disse não concordar com o facto de os colegas suporem a possibilidade de usar a multiplicação, porque a “distância vezes os minutos não dá nada que se perceba”. Houve risos na sala, porque o aluno fez uma careta, abriu muito os olhos e articulou as palavras pausadamente e de forma cómica. O grupo de Rafaela também concordou, mas Tomás referiu que provavelmente ninguém pensou logo assim (Guilherme protestou e disse que ele pensou), mas que os produtos obtidos rapidamente no Excel não revelaram nada que pudesse servir para começar uma resposta à tarefa. Depois, com a divisão, aconteceu uma “coisa” que não estavam à espera – no caso de Pedro, o quociente entre distância e tempo era sempre o mesmo número. Catarina pediu para intervir e perguntou o que é que corresponde ao quociente entre a distância e o tempo, se é a rapidez ou a velocidade. Madalena interveio e disse que é a velocidade, mas, quando Guilherme lhe perguntou por que não soube responder. Tomás pensou que se podia dizer as duas palavras, mas a velocidade foi o termo mais aceite pelos outros alunos com o argumento de que é usada nos automóveis e em todas as “coisas” que se deslocam. Rui, um dos elementos do grupo que geria a discussão e que se manteve calado até aqui, disse que quando viram que existia uma regularidade na tabela pensaram que a resposta à questão teria de passar por aquele número que permanece constante, como a “stora” lhe chamou.

Exploração de regularidades. Rafaela desenhou mais duas tabelas (horizontal e vertical) com os dados relativos à personagem Pedro, e ela e os colegas começaram a identificar regularidades dentro da grandeza distância. Verificaram que em ambas as tabelas o padrão era o mesmo. Rui e Tomás tentaram fazer o mesmo para a grandeza tempo, mas só o conseguiram com os dados da personagem Pedro. Explicaram o valor constante que obtiveram através do quociente entre as grandezas, porque os números em cada uma das colunas “andam da mesma maneira para o dobro, triplo e por aí”. Os alunos do grupo de João, junto do qual eu estava sentada, ficaram muito atentos e conversavam entre si, porque não averiguaram o motivo da existência de um valor constante. Guilherme virou-se para eles e disse que já lhes tinha explicado isso na aula anterior. Pergunto a Rui e Tomás se, para andar na mesma maneira, segundo as suas palavras, era obrigatório que seguissem o padrão do dobro, triplo, quádruplo. Como muitos alunos mostraram não perceber o que eu disse, perguntei então se poderia "andar da mesma maneira" se o padrão deixasse de ser o dobro, triplo e fosse por exemplo 1,5 ou 5,1. Os alunos escreveram mais uma linha na tabela e desenharam uma seta à qual juntaram o número 1,5. Alguns alunos puseram o dedo no ar porque queriam responder enquanto Tomás se apressou a calcular os valores (com a calculadora) e, por fim, confirmou que sim, porque "os números dos metros e dos minutos andam da mesma maneira quando se multiplica por 1,5", ou, acrescentou Rafaela, por qualquer outro número.

Quando existe proporcionalidade? Discutimos de seguida a possibilidade de se prever o tempo que cada um das personagens levaria a chegar à Cruz Alta. Os alunos do grupo de João reconheceram que a sua resposta afirmativa a esta questão pressupunha que entre os 1 000 e 2 000 metros tudo se passaria do mesmo modo que entre os 0 e os 1 000 m e que, na verdade, isso provavelmente não acontecia. No entanto, apontaram que a personagem Pedro tinha uma estratégia – "porque era o mais inteligente do grupo" – tendo-se deslocado sempre à mesma velocidade, e, se o seu comportamento se mantivesse, seria possível prever o tempo que levaria a chegar à Cruz Alta. Foi explorada a representação gráfica das respostas apresentadas e que correspondiam a situações de proporcionalidade directa. Isto foi alvo de alguma discussão entre os grupos e permitiu perceber que a identificação de situações de proporcionalidade passa em parte pela nossa experiência e pela nossa compreensão dos acontecimentos. Verificámos que, em questões do quotidiano, por uma questão prática, fazemos usualmente julgamentos supondo uma relação proporcional, embora saibamos que, em rigor, ela não existe.

A segunda parte da tarefa. Faltavam cerca de 40 minutos para terminar a aula. Distribuí a segunda parte da tarefa "Subida à Pena". Os alunos estavam surpreendidos por esta tarefa também ter por base a mesma história sobre o *Palácio da Pena*. Rosa perguntou onde comprei o livro, pois os que ela conhece da colecção *Uma Aventura* não têm nada relacionado com Matemática. Lembrei novamente aos alunos que não usariam o manual durante as aulas dedicadas ao tema da proporcionalidade directa, mas sim um conjunto de tarefas baseadas no livro que estavam a trabalhar nas disciplinas de Língua Portuguesa e História.

Os alunos debruçaram-se sobre a tarefa e desta vez pareceram mais calmos no que respeita à organização dos registos. Ouvi-os várias vezes a dizerem que a estratégia da personagem Pedro estava associada ao quociente constante entre as grandezas. Os alunos pediram para ir para a sala de computadores quando faltavam cerca de 20 minutos para terminar a aula. Pensei que era pouco tempo mas eles insistiram e deixeios ir. Revelaram, neste dia, mais facilidade na organização do grupo, trabalharam na planilha e, simultaneamente, escreveram o relatório no processador de texto. Pedi-lhes para gravarem o trabalho nas disquetes, mas não me ligaram e continuaram a trabalhar, apesar de a aula estar a terminar. O grupo de Rosa disse ter concluído a tarefa e pediu para imprimir o relatório. Disse-lhes, então, para o gravarem no ambiente de trabalho, pois, assim, em vez de transportar as disquetes para casa, enviava logo o trabalho para o meu correio electrónico. Os alunos ficaram curiosos e disseram que eles próprios o podiam fazer, se eu lhes desse o meu endereço electrónico. Hesitei um pouco, mas resolvi aceder, criando um endereço electrónico para o efeito. A aula terminou, mas, à excepção de um grupo que já havia concluído a tarefa, os outros continuaram a trabalhar, apesar da minha insistência para que acabassem. Como os relatórios estavam quase feitos, os alunos queriam enviá-los pela Internet. Mostraram-se muito entusiasmados com esta possibilidade, embora eu estivesse receosa em relação à recepção dos seus ficheiros. Enfim, decidi arriscar e acordámos que o dia seguinte seria a data limite de entrega dos relatórios. Nesse dia, recebi todos os trabalhos, excepto o de um grupo que só o entregou na segunda-feira, na véspera da aula seguinte. Os registos de auto-avaliação dos alunos referem como ponto forte da tarefa o uso da planilha, e os argumentos giravam em torno do gosto pelo uso do computador, baseado no facto de isso os cativar e de permitir obter todos os resultados de imediato.

Discussão dos trabalhos (aula 5). Iniciei a quinta aula com a apreciação global do trabalho realizado pelos alunos e da qualidade dos trabalhos de grupo. Também referi a minha surpresa com a rapidez com que realizaram os relatórios. Coube ao grupo de Dinis gerir a discussão, e os alunos começaram por explicar as suas estratégias. Esta discussão foi menos participada e menos envolvente que a da tarefa anterior, provavelmente porque se tratava de explorar relações numéricas entre os dados ,condicionadas apenas pela necessidade de o personagem João chegar primeiro que o seu amigo Pedro. Os alunos realizaram a tarefa com rapidez na planilha. De qualquer modo, pareceram ter percebido que, se a velocidade tiver um valor constante, conhecendo a distância percorrida, podem saber o tempo ou, sabendo o tempo, podem conhecer a distância.

Quando faltavam cerca de 50 minutos para terminar a aula, Dário ajudou-me a distribuir a nova tarefa, “Mais problemas”. Os alunos continuaram a mostrar surpresa pelo facto de todos os problemas se referirem às personagens de *Uma Aventura*. Rafael questionou-me sobre a forma de me enviar o relatório, ao que respondi que, nesta tarefa, era apenas necessária a elaboração de um registo simples com a resolução dos problemas. Guilherme perguntou se, tal como no último relatório, podiam enviar o trabalho do grupo para o meu endereço electrónico. Pela atenção que quase todos prestaram, percebi que este pormenor parece ter cativado os alunos.

Nova discussão (aula 6). Os alunos entraram na aula muito agitados. Conversavam alto e atropelavam-se enquanto arrumavam as mesas em grupo. Tal como nas aulas anteriores, comecei por comentar os trabalhos que eles realizaram. Lembrei-lhes que, embora a recepção dos trabalhos pela Internet fosse facilitador no caso de estes terem sido feitos em computador, isso não acontecia se, pelo contrário, o relatório estivesse feito em papel, dado o acréscimo de trabalho. Os alunos disseram que não gastavam muito tempo e, na sua maioria, tencionavam continuar a fazê-lo.

O grupo de Guilherme fez a gestão da discussão e a correcção dos problemas da aula anterior, evidenciando várias estratégias. Intervim na discussão, procurando levar os alunos a compreender os termos “razão” e “proporção”. Tal como já referi, a representação dos dados que mais surgiu foi a tabela, mas também surgiu por vezes a representação na forma de proporção, com os valores devidamente etiquetados. Uma das questões que mais discussão suscitou refere-se à legitimidade das duas representações e conseqüentes raciocínios no sentido de obter valores omissos. Posteriormente, e como essa tinha sido uma das situações que os alunos referiram na folha de auto-avaliação relativa à segunda parte da tarefa “Subida à Pena”, pedi ao grupo para analisar os gráficos das relações proporcionais e não proporcionais.

O final da unidade. Ainda na aula 6, Sara distribuiu a tarefa “Eu tenho razão” e os grupos trabalharam nela até ao fim da aula. Insisti com eles sobre a escrita de um modo claro dos raciocínios usados para obterem a resposta. Todos os alunos concluíram a tarefa antes do fim da aula. Recebi dois trabalhos em papel e os restantes mais tarde pela Internet.

Na aula 7, devido a um feriado, a maioria dos alunos faltou e perante isso decidi discutir algumas dúvidas dos poucos alunos presentes e propor alguns exercícios e problemas. A aula 8 começou com a análise dos trabalhos realizados na aula anterior, continuou com a discussão de uma dúvida de Rosa e foi, no tempo restante, dedicada à realização da tarefa “Uma ponte de esparguete”. Esta tarefa foi depois discutida na aula 9, com direcção do grupo de Vasco, tendo-se analisado por que diversos fenómenos são indevidamente vistos como relações proporcionais. Por fim distribuí a tarefa “As aparências iludem!”, relacionada com escalas. Os alunos mobilizaram os seus conhecimentos sobre relações proporcionais e utilizaram-nos para resolver os problemas propostos. Raramente solicitaram o meu auxílio e limitei-me a ajudar os grupos mais trapalhões. Antes da aula terminar, disse aos alunos para entregarem o trabalho em papel pois queria vê-lo rapidamente, já que na aula seguinte seria realizada a avaliação final da unidade.

Aprendizagens dos alunos

Identificação de relações directamente proporcionais. A entrevista final continha diversas situações para os alunos analisarem. Eles deveriam verificar se essas situações envolviam ou não uma relação proporcional explicando oralmente o seu raciocínio. Na questão 1.1 os dados eram apresentados na seguinte tabela:

A	2,5	4,3	5
B	7,5	12,9	15

Vejamos a resposta de um aluno.

Guilherme: (Observando por breves instantes a tabela) Então... Mas tenho de usar o Excel? Este tem poucos [dados] e eu já sei que existe proporcionalidade.

Professora: Não tens de usar. Estão aqui estes materiais à tua disposição, só usas o que quiseres. Como sabes que existe proporcionalidade nesta situação?

Guilherme: (Não usa qualquer material) Então, primeiro vi a [linha] A e a [linha] B (aponta para as linhas correspondentes às variáveis A e B). Vi o último par de números.

Professora: Quais?

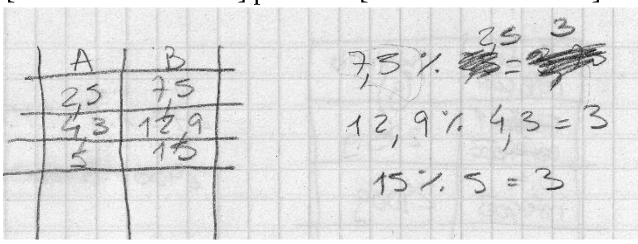
Guilherme: (Aponta para a última coluna da tabela) Ao multiplicar 5 por 3 dá 15… Tenho quase a certeza que sim [que existe proporcionalidade]. Com esta conta, acreditei que o mesmo se passa com os outros [pares] números e dá, em 7,5 há 3 vezes 2,5. Aqui é igual, basta saber a tabuada para isso, 3 [parte decimal de 4,3] vezes 3 dá 9 [parte decimal de 12,9] e 3 vezes 4 é 12. "Tá" certo.

Professora: Consegues identificar a constante de proporcionalidade?

Guilherme: É 3, se dividir 15 por 5 dá 3. Também acontece com os outros [pares de] números.

O aluno responde que existe uma relação proporcional entre as grandezas A e B. O seu raciocínio apresenta a seguinte seqüência: (i) identifica uma relação multiplicativa entre o par numérico que envolve números inteiros ("multiplicar 5 por 3 dá 15"), apesar de este aparecer em último lugar na tabela; depois (ii) conjectura que existe uma relação idêntica nos primeiros pares numéricos da tabela (que são números decimais) quando diz “acreditei que o mesmo se passa com os outros”; e, por fim, (iii) verifica a veracidade da conjectura. Faz todos os cálculos mentalmente, sem qualquer apoio escrito, apesar de os dados envolverem números decimais, ainda que pequenos. É evidente que faz uso do seu conhecimento sobre números, nomeadamente sobre múltiplos de três. Identifica a constante de proporcionalidade como o quociente entre os valores das grandezas B e A, isto é, reconhece a existência de outra regularidade entre os valores da tabela. Guilherme usa um raciocínio de natureza funcional, pois realiza operações entre grandezas.

Vejamos a resposta de outro aluno à mesma questão.

> **Tomás:** É para ver se existe proporcionalidade entre este [A] e este [B]. Posso pôr assim? (Gesticula o desenho de colunas.)
>
> **Professora:** Na vertical? Podes resolver como quiseres, desde que vás dizendo como estás a pensar.
>
> **Tomás:** Pois na vertical. (Constrói uma tabela) Agora tenho de dividir estes [valores da coluna B] por estes [valores da coluna A].
>
> 
>
>
> E deu, deu sempre o mesmo número, o 3. Assim o 3 é a constante.
>
> **Professora:** E então existe ou não proporcionalidade?
>
> **Tomás:** Existe uma constante quando dividimos este [B] por este [A], por isso há proporcionalidade.
>
> **Professora:** Hum… Estou a ver. E se dividires os valores da coluna A pelos da coluna B, também existirá proporcionalidade?
>
> **Tomás:** Ah? Ao contrário? Eu acho que há.
>
> **Professora:** Achas ou tens a certeza?
>
> **Tomás:** Eu acho que há, porque aqui os números [coluna B] são o triplo destes [coluna A]. E são todos o triplo. Se fizer assim ao contrário, estes números [coluna A] a dividir por estes [coluna B], também dá sempre o mesmo número.
>
> **Professora:** Qual? Este 3?
>
> **Tomás:** Não. Três é que não é. Posso ver na calculadora?

Professora: Não, Tomás, não é necessário calculares o valor. Acabaste de dizer que esse valor é sempre o mesmo e isso parece ser suficiente para dizeres que existe proporcionalidade.

Tomás: Sim. A constante é quando uma coisa é sempre o mesmo e não muda. Não muda a constante, os números… Os números para dividir mudam. Quando é constante há proporcionalidade.

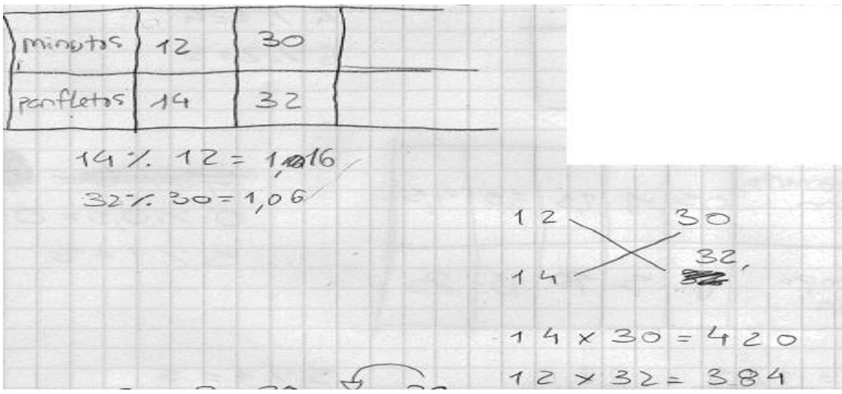
Professora: Está bem, já percebi o que me estás a dizer. Mas voltemos aqui à tabela. Disseste que os números da coluna B eram o triplo dos da A e a constante de proporcionalidade é 3. Então o que pudemos dizer sobre os números da coluna A em relação aos da B?

Tomás: Se… Se é ao contrário do triplo… É a terça parte pois, 5 é terça parte 15 e todos é assim. A constante, pois eu acho que é o contrário de 3, quando o 3 vai para baixo.

O aluno responde com alguma rapidez que existe uma relação proporcional entre as grandezas A e B. Para identificar esta relação representa os dados numa tabela vertical, talvez por ser este o sistema de representação associado ao uso da folha de cálculo utilizada com frequência durante o desenvolvimento da unidade de ensino. Tomás realiza as divisões mentalmente e verifica a existência de uma constante entre as grandezas A e B, regularidade que lhe garante a existência de proporcionalidade.
Vejamos agora os conhecimentos mobilizados por este aluno para responder a outra questão do mesmo grupo, apresentada na forma de texto:

Se uma impressora demora exactamente 12 minutos a imprimir a cores 14 panfletos, então em 30 minutos imprime 32 panfletos.

Tomás: Pois… Vou ver ser há [proporcionalidade]. (Constrói uma tabela.)



Professora: Diz o que estás a pensar.

Tomás: Fiz a tabela para ver melhor. Depois, assim como fiz neste problema [questão anterior], vou dividir agora os panfletos pelo tempo. (Usa a calculadora) E não dá o mesmo número e por isso não dá, não há. Hum… Ainda vou fazer uma coisa [cálculos].

Professora: E estes números aqui em cruz? Para que são?

Tomás: Ah. (Sorri) Eu achava que ia dar e não deu, depois fiz estas multiplicações cruzadas, porque na aula eu sei que quando havia proporcionalidade dava o mesmo número e aqui não dá.

Após identificar as grandezas, Tomás organiza os dados numa tabela horizontal. Desenvolve depois um raciocínio multiplicativo de natureza funcional e procura a constante de proporcionalidade. O facto de não conseguir encontrar essa constante leva-o a dizer que não existe proporcionalidade, muito embora não pareça suficientemente confiante nos resultados obtidos através da divisão que realiza na calculadora, talvez pela semelhança dos números (1,16 e 1,06). Faz uma nova abordagem à questão e representa os dados numa estrutura informal, colocando os dados da mesma grandeza na mesma coluna, e investiga outra regularidade que afirma conhecer, a igualdade entre os produtos cruzados. O aluno revela capacidade de fazer diferentes abordagens à questão, consciente das regularidades que pode encontrar numa relação proporcional e da natureza multiplicativa desta relação, escolhendo adequadamente as operações de multiplicação e divisão. É provável que esta capacidade tenha sido desenvolvida ao longo da unidade de ensino, principalmente nas tarefas abertas nas quais os alunos exploraram relações multiplicativas entre os dados de grandezas directamente proporcionais.

Sistemas de representação. No que respeita aos sistemas de representação que os alunos tendem a usar, atendamos à resposta de Tomás à questão 2, da entrevista, que considera a representação dos ingredientes de uma receita transmitida ao telefone:

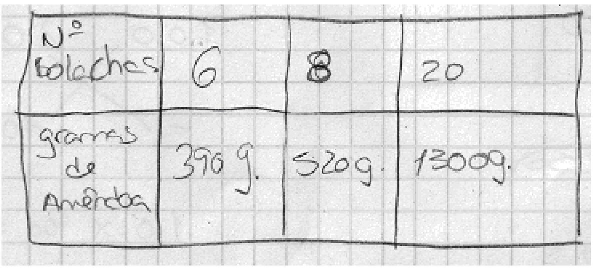
Tomás: Aqui tenho. Aqui diz que há proporcionalidade entre o número de bolachas, não é? E o peso das amêndoas. E agora é para pôr como?

Professora: Como é que tu pensas que ele organizou esta informação?

Tomás: Eu acho que é… (Passa algum tempo)

Professora: Uma boa maneira de mostrar a informação.

Tomás: Ah. Pode pôr numa tabela. (Constrói uma tabela.)



Nº bolachas	6	8	20
gramas de Amêndoa	390 g.	520g.	1300g.

Professora: A tabela. E por que?

Tomás: Sim. Porque era a maneira mais fácil das pessoas compreenderem os números. Vê-se logo.

Professora: Para ti seria a maneira mais fácil?

Tomás: E também com imagens. (Faz uma representação pictórica de 6 bolachas para 390g de amêndoa.) Aqui é que era difícil pôr [representar] as amêndoas. Mas podia ser assim. Esta maneira é mais fácil se as quantidades não forem muito difíceis de desenhar…Aqui até é difícil.

Tomás é peremptório ao afirmar que a tabela é o sistema de representação que permite uma fácil leitura dos valores numéricos, como aliás se verifica no seu trabalho ao longo da entrevista. Contudo, não deixa de referir que sob determinadas condições também poderia usar a representação pictórica.

Vejamos as preferências de Guilherme no que respeita os sistemas de representação dos dados:

Guilherme: Sim. Hum… Então… Põe as bolachas lá em cima, depois as coisas, ingredientes em cada linha. Então… Depois quando quer mais bolachas é só ver a quantidade dos outros por ali abaixo.

Professora: Era assim que farias se fosses o chefe Bernardo?

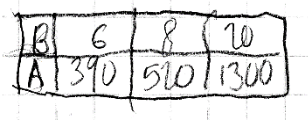
Guilherme: Sim, porque a tabela dá para resolver tudo.

Professora: Como assim? O que queres dizer com dá para resolver tudo?

Guilherme: Na tabela… Porque eu acho que na tabela conseguimos ver mais facilmente e rapidamente [os dados] cada problema.

Professora: Podes representar os dados do problema?

Guilherme: “Tá” (constrói uma tabela).



B	6	8	20
A	390	520	1300

Aqui o B, o B de bolachas, a linha da quantidade de bolachas e o A é a linha da quantidade de amêndoas. Isto, para as pessoas saberem o que é que estes números querem dizer. É assim que eu acho que ele podia ter feito a tabela.

Professora: Ok. Podes continuar.

Guilherme: (Lê a questão 2.2.) Sim, dá. Outra forma?

Professora: Em que outras formas é que tu poderias representar estes dados?

Guilherme: Gráfico, pode ser.

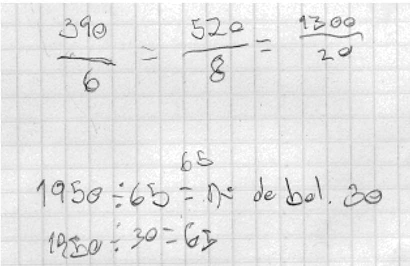
Também Guilherme refere que a tabela constitui a forma mais eficiente para representar os dados e, alargando o âmbito do problema, diz que nas linhas abaixo do número de bolachas pode colocar as quantidades correspondentes dos outros ingredientes. Ainda segundo a sua opinião, a tabela é uma estrutura poderosa que o ajuda tanto a escolher como a verificar o tipo de cálculos (divisão e multiplicação) que deve realizar, quando refere que “foi só multiplicar ou dividir para descobrir o que queria”. Por outro lado, o aluno refere que o gráfico é também uma forma de representação dos dados.

Estratégias usadas pelos alunos. No que respeita às estratégicas dos alunos, analisamos as respostas de Tomás e Guilherme a uma questão em que se pretendia saber o número de bolachas a obter partindo de uma determinada quantidade de amêndoa.

Tomás: “Tão” vejo já aqui, com 1300 faço 20. (Utiliza a representação em fracção que escreveu na questão anterior.) Primeiro vou saber qual é a constante, não é?

Professora: Podes fazer como quiseres.

Tomás: (Utiliza a calculadora.) Ah. 1300 a dividir por 20 dá 65. A constante é 65. Agora tenho de arranjar um número que multiplicado por 65 dá 1950, isto é, 1950 a dividir por 65. (Escreve 1950:65=n.º de bolachas) É 30, 30 bolachas. Só para confirmar 1950 a dividir por 30 dá 65, que é a constante.



Tomás usa uma estrutura de representação utilizada numa questão anterior da entrevista (igualdade entre as razões), atendendo ao facto de haver uma relação proporcional entre os dados. Averigua a constante de proporcionalidade entre a quantidade de amêndoas e o número de bolachas. Após recuperar a representação formal, opta por desenvolver uma estratégia menos formal, talvez porque compreende bem o contexto do problema e as relações numéricas multiplicativas que pode estabelecer para obter a quantidade de bolachas. Revela necessidade de escrever uma etiqueta para não perder o significado do que vai calcular, facto que mostra uma compreensão do significado dos números envolvidos no problema e a essência das operações de multiplicação e divisão.
Vejamos agora as várias estratégias de Guilherme.

> **Guilherme:** (Começa a fazer alguns cálculos mentalmente) Então… 1300 é múltiplo de 100 e 1950 é múltiplo de 50, deve haver aqui… (Passam alguns momentos) Hum, metade de 1300 é 650.
>
> **Professora:** Talvez seja melhor apresentares algum esquema para te guiar.
>
> **Guilherme:** É quanto o que há de amêndoas?
>
> **Professora:** 1950g
>
> **Guilherme:** Então já “tá” o resultado final.
>
> **Professora:** Então?
>
> **Guilherme:** São 30 bolachas.
>
> **Professora:** Explica-me lá como estás a pensar.
>
> **Guilherme:** Então é assim. Afinal até é bastante simples. (Constrói uma tabela.)

> **Professora:** Mas esta tabela está na base daquilo em que estavas a pensar?
>
> **Guilherme:** Sim, faço-a na cabeça. Então… Vamos ver, há 20 bolachas por cada 1300 [g] de amêndoas. A metade de 20 é 10 e 1300 a dividir por dois dá 650. Agora, se fizermos 1300 mais 650 vai dar 1950. Então ao 20 junto a sua metade e dá 30.

(…)

Professora: OK. Mas será que conseguirias resolver esta questão sem usar a adição? (Aponto para a adição que o aluno regista)

Guilherme: Então… Só se for… Eu acho que sei, por exemplo, multiplicar por um e meio porque 30 é 20 mais a metade de 20 e aqui também. (Aponta para a linha referente à quantidade de amêndoa) Também 1950 a dividir por 1300 dá 1,5.

Professora: Será…

Guilherme: E… (Entusiasmado) E também posso saber a amêndoa para uma bolacha. Era só dividir 1300 por 20… (Utiliza a calculadora) E dá 65. Depois… 1950 divido por este [65] dá 30.

Professora: Pronto Guilherme, ok. Já sei que quando começas a investigar, vais por aí fora sem parar. Deixa-me perguntar qual destas estratégias é que costumas utilizar.

Guilherme: Hum… Então… Não sei bem. Acho que depende.

Professora: E depende do quê?

Guilherme: Ai. Não sei stora, depende dos dias. (Ri) Eu acho que… Talvez da forma dos números, se eu sei como eles são. Eu agora vi que podia fazer menos contas, mas quando li a pergunta… Foi, comecei logo a fazer contas de cabeça e a ver como é que isto funcionava.

Numa primeira abordagem ao problema, o aluno faz uso do cálculo mental e do seu conhecimento sobre múltiplos e divisores e evidencia algumas regularidades que ele sabe existirem. Nesta abordagem, Guilherme usa raciocínios aditivos e multiplicativos: "metade de 20 é 10 e 1300 a dividir por 2 dá 650. Agora, se fizermos 1300 mais 650 vai dar 1950. Então ao 20 junto a sua metade e dá 30". Esta resposta mostra que a representação dos dados numa tabela não assegura que o aluno desenvolva o seu trabalho através de um raciocínio exclusivamente multiplicativo.

Por saber que Guilherme gosta de investigar outras formas de resolver problemas, a professora colocou-lhe o desafio de resolver o mesmo problema sem usar o raciocínio aditivo. Com entusiasmo, usando os dados colocados na tabela, apresenta outra estratégia de resolução, utilizando um raciocínio multiplicativo de natureza escalar, isto é, dentro de cada grandeza (número de bolachas e quantidade de amêndoas). Identifica rapidamente o factor escalar (1,5), mercê da sua capacidade de cálculo. Logo em seguida, refere outra estratégia, utilizando um raciocínio multiplicativo de natureza funcional, isto é, entre grandezas, e identifica também a constante de proporcionalidade.

Conclusão

No fim da unidade de ensino, os alunos revelaram saber identificar com desembaraço situações onde existem relações proporcionais. Para isso, investigam em cada situação a ocorrência de regularidades entre grandezas ou dentro das grandezas. No que respeita aos sistemas de representação, os alunos mostram grande preferência pelo uso da tabela, que consideram uma estrutura facilitadora da análise dos dados. Contudo, revelam conhecer outros sistemas de representação e saber converter os dados entre diversos sistemas. A utilização freqüente da folha de cálculo poderá ter sido determinante para uso freqüente da tabela, tendo os alunos salientado a sua adequação para a leitura dos dados.

Nesta unidade de ensino, os alunos mostraram apropriar-se gradualmente da estrutura, invariância e equivalência que caracterizam as relações proporcionais. Por um lado, a natureza exploratória e investigativa das tarefas e a discussão dos resultados em grupo alargado parecem ter desenvolvido nos alunos uma flexibilidade na abordagem aos problemas, desenvolvendo raciocínios escalares ou funcionais. E, por outro lado, parecem ter contribuído para reforçar a capacidade dos alunos monitorizarem o seu trabalho, fazendo julgamentos sobre a fiabilidade do seu pensamento, a adaptabilidade das unidades e representações, a eficiência das estratégias e a razoabilidade das respostas.

A proposta pedagógica não pretendia transmitir directamente qualquer estratégia de resolução de problemas sobre proporcionalidade, mas sim levar os alunos a reconhecer regularidades que sustentassem o desenvolvimento de estratégias individuais coerentes, dando assim resposta aos problemas apresentados. Num conjunto alargado de tarefas que foram apresentadas em diferentes formas de representação, os alunos desenvolveram diversas estratégias em que revelam compreender a natureza multiplicativa das relações proporcionais. Conseqüentemente, desenvolveram versatilmente estratégias dentro das grandezas ou entre grandezas, incluindo a estratégia da equivalência entre razões, a estratégia do factor escalar e o método da razão unitária (cálculo da constante de proporcionalidade). A opção por uma ou outra estratégia parece depender sobretudo da interpretação que o aluno faz do problema, do seu conhecimento sobre os números envolvidos e das relações que de imediato consegue estabelecer.

Em conclusão, a unidade de ensino inspirada nesta proposta pedagógica parece ter contribuído fortemente para um bom desempenho dos alunos. Muito em especial, parecem ter sido importantes o tipo de tarefas e a sua contextualização, a valorização da intuição, a realização do trabalho em grupo e a discussão de resultados em grupo alargado na aula. A abordagem exploratória levou os alunos a não ter receio de procurar relações, formular conjecturas, mudar de representações e alterar estratégias. Em vez de procurar identificar a regra a aplicar, os alunos procuravam compreender o problema e encontrar regularidades em que se apoiar. Significativo foi, também, o entusiasmo resultante do uso do computador para analisar dados em tabelas e gráficos, para elaborar os relatórios e para os enviar pela Internet. Este estudo mostra, ainda, que não é com uma tarefa isolada que se consegue alcançar o conjunto dos diversos objectivos de aprendizagem, mas sim com uma planificação de unidades de ensino com tarefas, actividades e materiais diversificados e organizados de forma coerente, sendo contudo de relevar o papel das novas tecnologias e da abordagem exploratória/investigativa.

Referências

ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Lurdes; OLIVEIRA, I. *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica, 1999.

BEHR, Merlyn; HAREL, Guershon; POST, Thomas; LESH, Richard. Rational number, ratio and proportion. In: GROUWS, D. (Org.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p.296-333. NY: Macmillan Publishing, 1992. Disponível em: <http://education.umn.edu/rationalnumberproject/92_1.html> Acesso em: 27 Novembro 2005.

CRAMER, Kathleen; POST, Thomas; CURRIER, Sarah. *Learning and teaching ratio and proportion:* research implications. 1993. Disponível em: <http://education.umn.edu/rationalnumberproject/93_4.html>. Acesso em 12 Maio 2006.

GRAVEMEIJER, Koeno. What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In: SANTOS, L.; CANAVARRO, A.; BROCARDO, J. (Org.). *Educação matemática:* caminhos e encruzilhadas, Lisboa: APM, 2005.

KARPLUS, Robert; PULOS, Steven; STAGE, Elizabeth. Proportional reasoning of early adolescents. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Org.). *Acquisition of mathematical concepts and processes*. New York, NY: Academic Press, 1993

LAMON, Susan. Ratio and proportion: Connecting and children’s thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, n.24, p.41-61, 1993.
LESH, Richard; POST, Thomas; BEHR, Merlyn. Proportional reasoning. In Behr, J.; Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1988.
LO, Jane-Jane; WATANABE, Ted. Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 28, n. 2, p. 216-236, 1997
MAGALHÃES, Ana; ALÇADA, Isabel. *Uma aventura no Palácio da Pena.* 7. ed. Lisboa: Caminho, 2001.
ME-DEB. *Currículo nacional do ensino básico:* competências essenciais. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica, 2001.
NCTM. *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM, 2000. Disponível em: <http://www.nctm.org/standards/overview.htm>. Acesso em: 12 Junho 2006.
NOELTING, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part 1 - The differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, v.11, p.217-253, 1980.
PONTE, João Pedro. Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, n.34, p.2-7, 1995.
______ . Investigar a nossa própria prática. In: GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM, 2002.
______ . Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005.
PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
POST, Thomas *et al* (1988). *Research on rational number, ratio and proportion*. Disponível em: <http://education.umn.edu/rationalnumberproject/98_1.html>. Acesso em: 12 Junho 2006;
RESNICK, Lauren; SINGER, Janice. Protoquantitative origins of ratio reasoning. In: Carpenter, T.; Fennema E.; Romberg, T. (Org.). *Rational number:* an integration of research. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1993.

Apresentado ao Conselho Editorial em 20/10/2007 e aprovado em 12/12/2007.