Explorando tarefas com tecnologias digitais para o ensino de fenômenos periódicos: quando o movimento fictivo se torna factível

Janete Bolite Frant[1]
Uniban - janetebf@gmail.com

Wellerson Quintaneiro da Silva[2]
Cefet-RJ / Uniban - profmatwellerson@gmail.com

Arthur B. Powell
Rutgers University - powellab@andromeda.rutgers.edu

Resumo

Este artigo explora a elaboração de tarefas utilizando tecnologias digitais desenvolvidas para computador, calculadoras gráficas e sensores de movimento com alunos do ensino médio. As tarefas foram desenvolvidas para a interpretação e a elaboração de gráficos cartesianos, que representem fenômenos periódicos. Apresentamos uma breve, porém, crítica revisão bibliográfica sobre o ensino e a aprendizagem de trigonometria, seguida de nossa opção teórica, a Teoria da Cognição Corporificada. Exibimos três exemplos: A Roda Gigante; A justaposição de gráficos utilizando calculadoras e sensores; e dois aplicativos e suas relações com a teoria adotada.

Palavras Chave: Elaboração de Tarefas. Tecnologia digital. Educação Matemática. Teoria da Cognição Corporificada.

Exploring tasks with digital technologies designed for teaching periodical phenomena: when a fictive movement becomes actual movement

Abstract

This paper explores the design of tasks using digital technologies for computers, graphic calculators and movement sensors. The tasks were developed for teaching how to interpret and elaborate Cartesian graphics that represent periodical phenomena. We present a brief but critical literature review about teaching and learning trigonometry, followed by our theoretical choice, the Embodied Cognition. We show three examples of tasks: The Ferris wheel; juxtaposing graphs using calculators and sensors; and two applets and we discuss them in light of the chosen theory.

Key words: Task Design. Digital technologies. Mathematics Education. Embodied Cognition.

Introdução

O uso de tecnologias na educação, em geral, se propaga rapidamente. Muito se deve aos novos computadores, *tablets*, celulares que têm uma grande capacidade de memória e execução, mas ter capacidade para integrar animações, hipertextos e outras performances não garante um aprendizado. É necessário avançar no campo da elaboração de tarefas, ramo de pesquisa conhecida internacionalmente como *task design*.

[1] Agradecimento a Texas Instruments Educational pelo equipamento de calculadoras gráficas e sensores
[2] Agradecimento a CAPES pela bolsa sanduiche processo número 8934/12-6.

Este artigo explora a elaboração de tarefas para o ensino de trigonometria, utilizando tecnologias como aplicativos, também conhecidos como *applets*, para computador, calculadoras gráficas e sensores de movimento. Estas tarefas fazem parte de uma pesquisa mais ampla sobre fenômenos periódicos.

Destacamos algumas dificuldades de alunos e de professores na compreensão da variável independente em gráficos trigonométricos, a partir de uma revisão bibliográfica e trabalhos empíricos, que expomos a seguir. Nossa proposta para a elaboração dessas tarefas se diferem de pesquisas anteriores, principalmente pela opção teórica filiada à Teoria da Cognição Corporificada - TCC. Buscamos com essa investigação elaborar e implementar tarefas onde os participantes interagissem discursivamente ao refletir sobre questões que envolvem gráficos cartesianos representando movimentos no tempo, como os gráficos distância x tempo.

Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugestões de que deve ser assegurado ao aprendiz a compreensão de aplicações em trigonometria.

> Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na *construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa.*[3] (MEC, 1998, p. 44).

No entanto ainda hoje, muitos estudantes e professores continuam apresentando dificuldades de entendimento desse tópico. Por isso, nesse trabalho procuramos enfatizar a relação entre gráficos de funções trigonométricas e os fenômenos físicos de movimento, tópico muitas vezes fragmentado no currículo do Ensino Médio.

Revisando alguns trabalhos na literatura sobre ensino ou aprendizagem em trigonometria, vemos que apresentam investigações sobre: a compreensão dos objetos matemáticos, a articulação dos mesmos, o desenvolvimento histórico ou epistemológico e a abordagem computacional no ensino (WEBER, 2005; FERNANDES, 2010; GOIOS, 2010; QUINTANEIRO, 2010). O foco dessas pesquisas foi investigar como aprendizes entendem o objeto matemático a partir de sua definição formal. O ponto principal onde nossa proposta se distancia das demais pesquisas consiste em realizar nossa investigação fundamentada em experiências sensoriais com fenômenos periódicos na trigonometria.

[3]Grifo nosso.

Trazemos na próxima seção uma revisão de literatura a fim de dialogar com as pesquisas em ensino e aprendizagem em trigonometria e destacar alguns pontos que foram cruciais no delineamento das nossas questões de investigação. Dessa forma, posteriormente, apresentamos nossa perspectiva e nosso prisma teórico que implicaram o desenvolvimento de *applets* e tarefas envolvendo também o *kit* calculadoras gráficas e sensores.

Revisão de literatura: panorama crítico

Weber (2005) ressalta que a trigonometria é um importante pré-requisito para tópicos como Física Newtoniana, Arquitetura, Agrimensura e muitos ramos da Engenharia. No entanto, seu trabalho não foca experiências concretas aplicadas nos contextos da Física, Arquitetura ou Engenharia. A pesquisa de Weber buscou compreender como alunos lidam com objetos matemáticos via processo de obtenção de cálculos. Weber (2005) argumenta que valores e expressões numéricas em trigonometria frequentemente tem como pano de fundo os processos geométricos para a obtenção dos mesmos.

O trabalho de Quintaneiro (2010) parece ter em comum com os resultados descritos em Weber (2005) a compreensão matemática via manipulação de procedimentos e consequentes processos, uma vez que Quintaneiro (2010), utilizando um software de geometria dinâmica, propôs diversas atividades contemplando: as representações algébrica e geométrica; radiano e grau; decimal e fracionário, decimal e o uso do π. Vários participantes - professores - dessa pesquisa pareciam não compreender quando o uso de π indicava o seu valor como número real (3,1415...), ou quando na unidade radiano indicava a medida angular equivalente a 180º. Além das entrevistas, analisando um livro didático, este autor acrescenta que os tipos de representação utilizados na escola podem levar a conflitos relativos ao conceito de seno. Gráficos, como o apresentado abaixo, podem não favorecer a compreensão da variável independente nas funções trigonométricas, pois não são vistas pelos alunos e professores como tendo uma escala decimal no eixo das abscissas. Veja quadro a seguir.

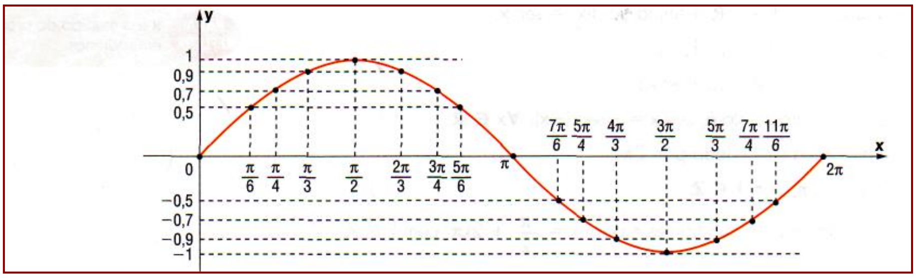

Figura 1: Gráfico Seno (DANTE, 2008 apud QUINTANEIRO, 2010, p. 57)

O trabalho de Kang (2012) parece corroborar essas ideias, pois relata que muitos dos licenciandos (60%) em Matemática, por ele investigados, mostraram não compreender a definição de função seno, uma vez que, por exemplo, em y = sen (x) não apresentavam uma explicação adequada da variável x, quanto a sua natureza (medida angular, número real etc.). Essa problemática, relativa à incompreensão da variável independente nas funções trigonométricas, parece ser vista até em pesquisas que se propõem a oferecer "ferramentas" para o ensino da trigonometria. Por exemplo, em Fernandes (2010, p.109) observamos um gráfico, como o da figura acima, que causa incompreensões como gráfico de funções reais trigonométricas, quando o trabalho se propunha a oferecer ferramenta para o ensino.

A má interpretação das variáveis da função, parece ser enfatizada também por alguns outros materiais, disponibilizados inclusive por órgãos governamentais (figura 2), como um que pode ser visto no RIVED (Rede Internacional Virtual de Educação)[4]. Goios (2010) investiga aprendizagem em aulas de trigonometria via recursos digitais, aplicando e analisando o uso de alguns *applets* disponíveis no Rived. Goios (2010) busca analisar a produção de significados e as metáforas conceituais apresentadas pelos alunos durante essas aulas e conclui que as intervenções e as metáforas conceituais utilizadas pelos alunos foram fundamentais para o desenvolvimento de conceitos trigonométricos.

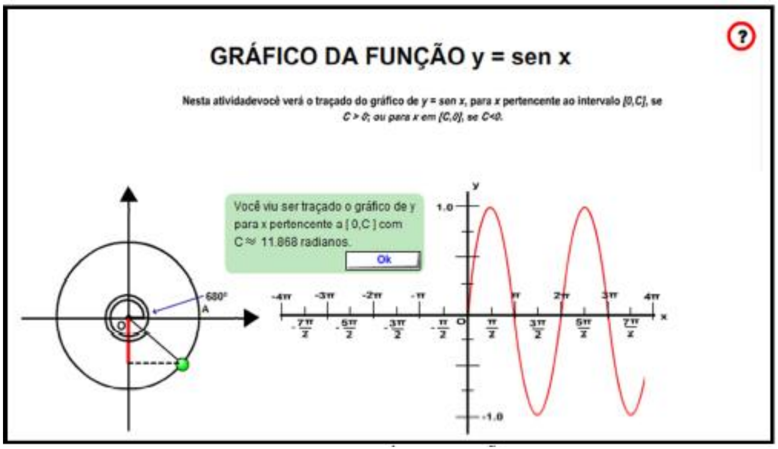

Figura 2: Gráfico Seno em Rived (Goios 2010, p. 77)

Com foco em observar como ocorre a compreensão dos conceitos trigonométricos, Kendal e Stacey (1997) chamam a atenção para dois métodos utilizados para introduzir o ensino de trigonometria no que tange a definição de seno e cosseno: um como razões de lados de triângulos e outro como coordenadas de um ponto sobre a circunferência unitária. Os autores observaram que os alunos que aprenderam trigonometria no contexto do primeiro

[4]Ver gráfico de Seno em Rived apresentado em Goios 2010, p. 77.

modelo, o do triângulo retângulo, tiveram um desempenho melhor em um pós-teste, do que os que aprenderam sobre o assunto utilizando um modelo de círculo unitário. Sob outras perspectivas, podemos observar pesquisas que têm como objetivo principal observar se estudantes têm domínio de conceitos matemáticos, tendo, por exemplo, como problema norteador "*Como varia o domínio de conceitos trigonométricos, revelado por alunos de diferentes anos de escolaridade?*" (ANTUNES; GONZÁLES, p. 2).

O que propusemos: o como e o porquê

Observando o panorama apresentado na seção anterior, destacamos em todos os estudos a dificuldade de compreensão da variável independente em gráficos trigonométricos, como anunciado logo na introdução deste artigo.

Na pesquisa mais ampla, nosso grande interesse residiu em investigar a produção de significados, ou seja, como as pessoas falam/pensam a respeito de gráficos cartesianos envolvendo fenômenos periódicos. Consideramos nossa experiência de sala de aula e resultados encontrados na literatura, inserimos tarefas que provocassem discussão e consequente reflexão sobre questões de gráficos cartesianos envolvendo passagem de tempo. Encontramos na literatura trabalhos que apontavam a preocupação com a representação decimal nestes gráficos. Entretanto em nenhum deles havia uma proposta que contemplasse o estabelecimento de um contexto para tal nos gráficos. Por isso buscamos elaborar tarefas nesta direção.

Esta pesquisa seguiu os princípios da pesquisa de *design*[5] ou *design research* que, segundo Cobb et. al. (2003, p. 9), visam desenvolver teorias e não apenas verificar empiricamente o que funcionou. Permite ser ao mesmo tempo prática e teórica, servindo de cama de testes para inovações. Esta pesquisa se desenvolve em ciclos, seguindo fases prospectivas e reflexivas, mudanças são realizadas no decorrer da mesma. Assim a elaboração de nossas tarefas também seguiram ciclos.

O primeiro ciclo englobou uma dinâmica realizada com professores de matemática que cursavam a pós graduação e uma tarefa de construção de gráfico.

A primeira provocação:

[5] Manteremos a palavra design no original pois ela reflete planejamento, implementação, adaptações etc... e já vem sendo utilizada em pesquisas nacionais.

Como você esboçaria o gráfico cartesiano distância x tempo de modo que represente a distância ao chão, de uma pessoa sentada numa cadeira da roda gigante; sabendo que esta pessoa deu 3 voltas ininterruptas até parar e sair da roda gigante.

Dadas as duas respostas abaixo, partimos para a elaboração das tarefas realizadas posteriormente em outras fases da pesquisa:

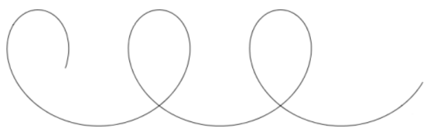

Figura 3

Figura 4

Esses dois gráficos foram importantíssimos, pois apresentaram possíveis causas de dificuldades de compreensão de fenômenos periódicos, modelados por funções trigonométricas.

Levando em consideração o panorama da revisão de pesquisas acima apresentado, observamos que os trabalhos revistos parecem não dar conta de interpretar respostas como as encontradas acima. Em geral, focam a compreensão das definições formais, sobretudo as pesquisas focam o "que falta" para a compreensão das noções trigonométricas e raramente buscavam compreender "o que efetivamente era dito". Este fato está relacionado com as inserções teóricas dos pesquisadores. Desse modo, apresentamos a seguir nossas opções.

O porquê: fundamentação teórica

Estamos filiados ao prisma da Teoria da Cognição Corporificada (TCC). Nessa perspectiva, a mente e corpo são indissociáveis. Para a compreensão da matemática, alguns pesquisadores utilizam os trabalhos de George Lakoff e Rafael Núnez (2000). Aqui vamos nos apoiar em outros pesquisadores que não necessariamente abordam a compreensão matemática, mas o nosso sistema conceitual como um todo. Concordamos com Castro e Bolite-Frant (2011) que em sala de aula, para argumentar e aprender algum tópico novo, utilizamos os mesmos mecanismos linguísticos e cognitivos que usamos no nosso cotidiano para compreender coisas mundanas. É importante notar que um organismo, formado pelo cérebro e o resto do corpo, interage com o ambiente de forma conjunta, a interação não é exclusiva nem do corpo nem do cérebro (ROSCH, 1999, LAKOFF; JOHNSON, 1999, DAMÁSIO, 1996). Nessa direção, as interações do corpo e cérebro com o ambiente promovem o sentido do que é real, e ainda, a forma na qual pensamos e agimos está diretamente relacionada com o nosso sistema conceitual. Para Lakoff e Johnson (1999), nós categorizamos como fazemos por causa do nosso corpo e cérebro, dada a forma como interagimos com o mundo.

Rosch (1999) traz críticas à visão clássica cartesiana onde conceito é definição. O que em geral para a matemática do matemático são de fato sinônimos. Para a sala de aula e para a vida não funciona. Segundo Rosch, processar sequencias lógicas não significa entendê-las. Para a autora, conceituar exige situações concretas complexas. Concordando com Rosch (1999, p. 61), para nós, conceitos constituem um aspecto do estudo de categorização, uma das funções básicas dos seres vivos e, portanto, "conceitos são sistemas abertos através dos quais os seres humanos podem aprender e inventar coisas novas".

Para nosso trabalho é importante também colocar o que entendemos por movimento fictivo. Tal termo foi cunhado por Leonard Talmy, linguista cognitivo. Ele apontou a frase: A cerca vai do platô ao vale. Ao ouvir esta frase, podemos ter uma interpretação fictiva[6], nosso cérebro percorre a cerca se movimentando do platô ao vale. Assim, um movimento fictivo é aquele em que o objeto, apesar de estático, pode ser mais bem compreendido pelo movimento dinâmico que sugere.

A matemática, assim como nossa linguagem cotidiana, utiliza muito este tipo de fenômeno, o movimento fictivo. Por exemplo, ao perguntar onde se localiza determinado endereço, podemos ouvir – A rua A vai descendo e logo cruza a rua B. Sabemos que uma rua é estática, mas lhe damos o movimento dos carros ou de transeuntes e, por isso, usamos verbos como descer, cruzar e até um advérbio logo.

O desenvolvimento da matemática também utilizou e utiliza esse mecanismo. Um ponto no plano cartesiano é uma localização fixa que pode ser escrita na forma de um par (a,o) onde "a" é a abscissa deste ponto e "o" sua ordenada. No entanto, nos aplicativos um ponto A se move sobre um circulo ou outra curva. Assim ao falar do limite de uma função usamos termos como "se aproxima de", "tende a", entre outros.

A diferença é que vivenciamos as coisas do cotidiano cotidianamente. Parece pleonasmo, mas não é. Estamos falando outra vez em categorizar. Ao longo dos primeiros anos de vida "experienciamos" diferentes mesas, as de jantar, por exemplo, são diferentes na casa da avó, de um coleguinha, da mesa do salão de festas e o viver estas diferentes mesas faz

[6] O termo fictivo por ele usado é aqui mantido devido às demais obras que o utilizam.

com que criemos a categoria mesa, que não é nenhuma em particular, e são todas, incluindo as que ainda não encontramos. Não é seguindo uma lógica que aprendemos o que é mesa. Seria impossível isolar uma criança para que aprendesse somente sobre copo, depois sobre garrafa, depois sobre mesa. Se assim o fosse, como esta criança poderia imaginar que a garrafa derramaria liquido no copo e que garrafa e copo poderiam estar sobre uma mesa?

Com as coisas ditas matemáticas, os alunos só têm experiências isoladas. O currículo segue uma ordem lógica e termina por fragmentar demais as informações sem permitir que o aluno faça relações entre elas.

Rafael Núñez desde 1999 relata resultados de uma série de estudos, onde indica que a compreensão das pessoas sobre o tempo vem de experiências concretas de movimento no espaço, incluindo atualmente pesquisas com os Ayamaras dos Andes chilenos.

Bolite-Frant (2010) apresenta uma dessas possibilidades

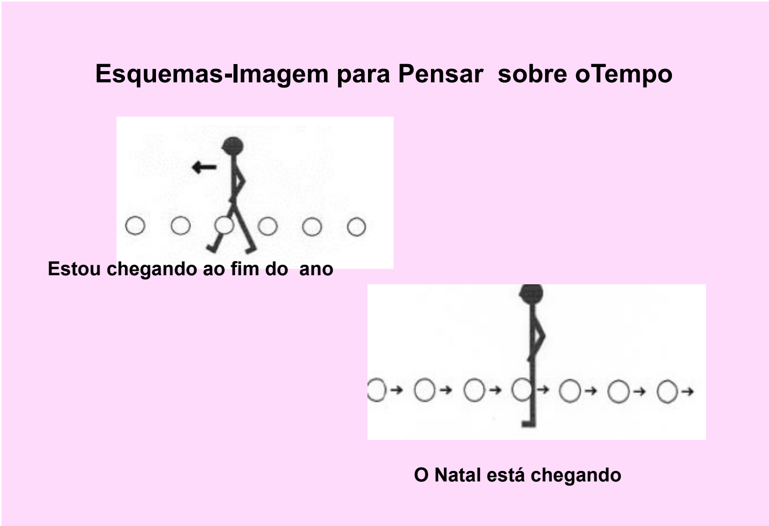

Figura 5: Duas maneiras de pensar o tempo a partir de deslocamentos

Percebemos que na fala “estou chegando ao fim do ano” compreendemos o tempo pelo fato de movimentarmos nosso próprio corpo desde pequenos, com isso aprendemos que coisas são deixadas para trás e, via inferências, vamos constituindo nosso sistema conceitual para passado, por exemplo. Com coisas que se aproximam em nossa frente, o mesmo ocorre e entendemos “estou chegando no fim do ano” sem esforço. Apesar de que o fim do ano não exista fisicamente, no Japão chega antes do Brasil.

Já na fala “O natal está chegando” compreendemos o tempo pelo fato de já termos várias experiências de parar num lado de uma calçada e carros, pessoas e ônibus passarem por nós, assim também pensamos o tempo e dizemos acabou a primavera (já passou) e o natal está chegando.

Ramscar et. al. (apud MIX et al 2010) afirmam que a maneira como as pessoas pensam sobre o tempo pode também ser influenciada por um tipo não literal de movimento, chamado movimento fictivo.

Matlock (2004) indica que não é necessária a presença de um movimento real, em um determinado momento, para haver processamento de tal movimento e, conclui-se, que o processamento de movimento fictivo inclui simulação mental de movimento.

Barsalou (2009) indica que simulação é tipicamente situada na experiência e que conceituamos a medida que capturamos padrões multimodais associados à percepção adquirida em situações de frequente experiência com o mundo, corpo e mente.

> Quando uma experiência ocorre (p.e. sentar gostosamente reclinado numa cadeira), o cérebro captura estas situações através de diferentes modalidades e as integra guardando uma representação multimodal em nossa memória (p. e., como a cadeira é fisicamente e sua sensação, a ação de sentar, introspecções de seu conforto e relaxamento). Mais tarde, quando é necessário um conhecimento para representar uma categoria (cadeira) as representações multimodais capturadas durante as experiências são reativadas para simular como o cérebro representou esta percepção, ação e introspecção associadas a este conhecimento. (BARSALOU, 2008, p.1).

Relação entre movimento fictivo e gráficos em fenômenos periódicos

Conjeturamos que as ideias associadas à compreensão de gráficos, relativos a movimentos de fenômenos periódicos, podem estar relacionadas à forma como compreendemos a “passagem de tempo” nesses movimentos. Pensamos também que essa noção abstrata de tempo, pode recrutar ideias adquiridas de experiências com o mundo físico, sendo consciente ou inconscientemente associada a uma translação horizontal.

Observando mais uma vez as respostas dadas nas figuras 3 e 4 do problema da roda gigante, note que a primeira está relacionada com um problema muito conhecido na literatura, no que diz respeito a gráfico movimento - confusão entre o gráfico cartesiano espaço x tempo e o gráfico da trajetória da pessoa na cadeira. Mais ainda, acreditamos que essa resposta esteja relacionada a uma simulação cognitiva de movimento, no sentido dado por Matlock (2004), que usa uma translação horizontal no lugar do tempo; pois o gráfico é obtido como o que se conhece por “trajetória do pneu da bicicleta” (ver figura 3). Estes gráficos das figuras 3 e 4 são obtidos pelo percurso dado por uma partícula que está num movimento circular uniforme onde, o centro do movimento circular, está em um movimento retilíneo uniforme. Mais ainda, a partícula, que fisicamente pode ser um corpo qualquer, é representada por um ponto. Lembrando que o ponto em matemática não tem dimensão, não pode ser visto fisicamente.

Considerando a circunferência em negrito rolando em um plano, sem deslizar, então a curva descrita por um ponto nessa circunferência é chamada de cicloide. No caso da curva rosa trata-se de uma cicloide longa. O que queremos chamar a atenção é que essa curva é obtida pela trajetória de um ponto que sofre uma translação composta com uma rotação. Na figura 7, a curva vermelha representa a trajetória da cadeira vermelha, assim a diferença é que, no caso da roda gigante, a rotação pode se dar no sentido anti-horário.

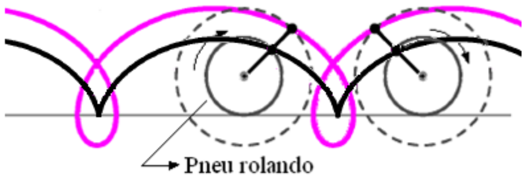

Figura 6

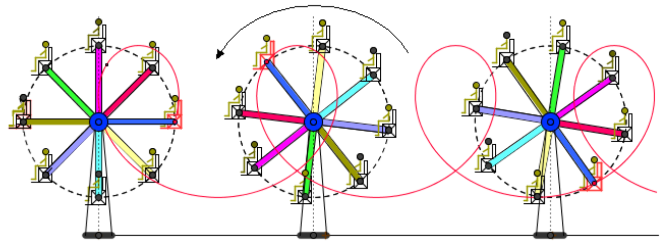

Figura 7

Levando em consideração a necessidade de uma translação horizontal para obtenção desse tipo de curva, levantamos a hipótese de que quem forneceu essa resposta pode ter feito uma simulação. Isto é, simulando um movimento horizontal da roda gigante (movimento que não há) no lugar do tempo. Este fato nos parece indicar evidências iniciais da relação entre movimento fictivo e gráfico envolvendo fenômenos periódicos. Assim, convergimos com as ideias de Ramscar et. al. (apud Mix et al 2010), trazidas na seção anterior, de que as pessoas podem recrutar conceitos adquiridos de experiências do mundo físico, para dar sentido a conceitos mais abstratos (como o tempo). E ainda, retomando nossa revisão de literatura, concluímos que tomar o tempo como uma das variáveis para a discussão de gráficos trigonométricos, pode propiciar uma compreensão da natureza da variável independente da função real.

Dado nosso prisma teórico, pretendemos explorar como os sujeitos percebem a natureza de diferentes gráficos oferecidos como respostas. Acreditamos que a possibilidade de reflexão discursiva sobre outras curvas, independentes da resposta certa ou não, pode favorecer o desenvolvimento de diferentes categorias e, consequentemente, enriquecer um conjunto de experiências sobre gráficos deste tipo.

Tecnologias digitais na exploração de fenômenos periódicos: *applets* e calculadora gráfica com sensor de movimento.

Como criar possibilidades de exploração para os aprendizes que promovam discussões a partir das respostas obtidas? Isto é, como discutir o movimento fictivo, um movimento, que ao menos até ser materializado, não existe? Ou, sob o prisma da cognição corporificada, como promover exploração física de movimento visando discutir gráficos como da figura 4?

Pensamos que isto pode ser alcançado com o auxílio das tecnologias. Assim elaboramos tarefas envolvendo uma articulação de calculadoras gráficas com sensores de movimentos, e *applets* por nós desenvolvidos.

Concordando com Ramscar et. al. (apud Mix et al 2010), pensamos que o engajamento no pensamento sobre o movimento, nesse caso o movimento fictivo, pode estar intrinsecamente relacionado ao modo como pensamos no tempo. Como destacamos anteriormente, conjeturamos que esse engajamento possa ser viabilizado pelo contato/interação com representações desse movimento. Para nós, representação não indica uma realidade externa expressa, mas é constituinte da produção de conhecimento (BOLITE-FRANT, 2002).

Partimos então para tornar um movimento fictivo em um movimento factivo via tecnologia. De fato acreditamos que representações viabilizadas na tela do computador podem ser constituintes de produção de conhecimento, por conta da característica de dinâmica e interatividade dessa tecnologia.

Dada essa possibilidade de representação com o computador pensamos que um movimento que era fictivo se torna factível. A seguir um *applet* desenvolvido.

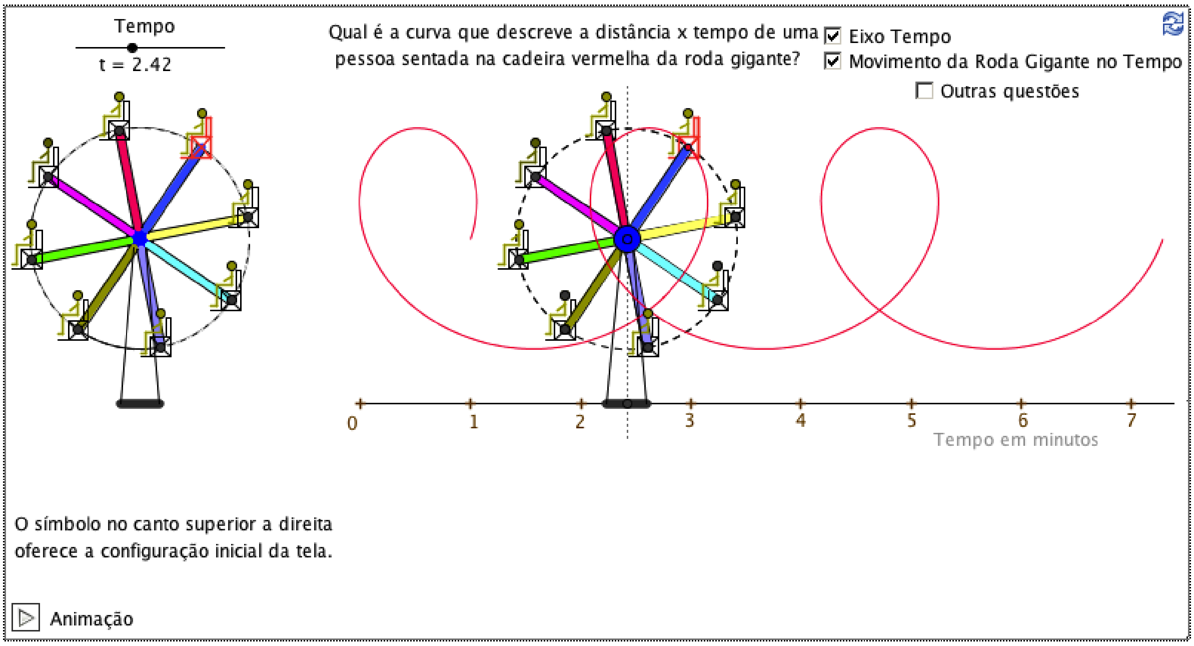

Figura 8: Applet "Roda Gigante".

Desenvolvemos este primeiro *applet* com o fim de promover discussão acerca do gráfico em vermelho. Por questões de espaço, não detalharemos aqui todas as atividades que foram programadas com o *applet* "Roda Gigante".

Além das questões sobre o tempo e possibilidades de exploração e reflexão desta variável, as respostas relativas ao problema da roda gigante, como a da figura 4, e observações no *applet* "Roda Gigante", revelaram como pode ser difícil compreender fenômenos periódicos modelados por curvas senoidais. Não é nada simples observar um movimento circular e pensar na sua decomposição. Pode levar a uma dificuldade de compreensão da distinção de gráfico da distância da pessoa ao chão em relação ao tempo e o gráfico da trajetória do movimento, até então fictivo.

Se considerarmos uma partícula num movimento circular, podemos notar que essa partícula se movimenta tanto na horizontal quanto na vertical. Isto é, se observarmos um vetor com extremo na circunferência, ele se mostra como um resultante de um V_x e V_y.

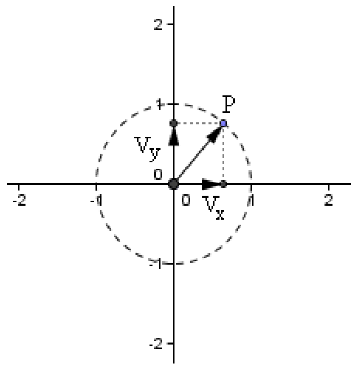

Figura 9: Vetor Movimento Circular

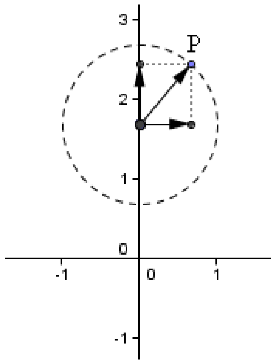

Figura 10: Vetor Movimento Circular 2

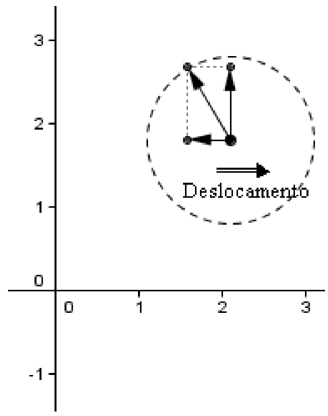

Figura 11: Vetor Movimento Circular no Tempo

Na figura 9, as ordenadas do vetor P são dadas por $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \operatorname{sen}(t) \end{cases}$, e à medida que *t* varia o ponto P "percorre" a circunferência pontilhada. Na figura 10 todos os pontos foram deslocados 1,5 unidades para cima, então P é dado por $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = 1{,}5 + \operatorname{sen}(t) \end{cases}$. Se deslocarmos o centro da circunferência *t* unidades para a direita, P é obtido por $\begin{cases} x = t + \cos(t) \\ y = 1{,}5 + \operatorname{sen}(t) \end{cases}$, como na figura 11. Ajustando a ciclóide (na verdade uma reflexão de ciclóide), a fim de obtê-la prolongada, alteramos a velocidade de rotação e obtemos a curva vermelha que é dada na figura x, tendo seus pontos com coordenadas $\begin{cases} x = \ t \ + \cos(3t) \\ y = 1{,}5 + \operatorname{sen}(3t) \end{cases}$.

O que queremos destacar é que a compreensão de como uma curva senoidal se relaciona com o movimento circular, pode exigir não só a questão de como uma pessoa compreende o tempo, mas também como ela "enxerga", conscientemente ou não, a decomposição do movimento circular, pois para o gráfico da altura em relação ao tempo só importa o deslocamento vertical da cadeira na roda gigante, isto Vy.

Essas dificuldades foram também foco na elaboração do aplicativo 1, o da roda gigante.

O aplicativo 2 - Pistão - parte de uma construção que visa isolar o deslocamento vertical desse movimento circular. Dessa maneira podemos concentrar as observações e discussões sobre a natureza desse deslocamento vertical.

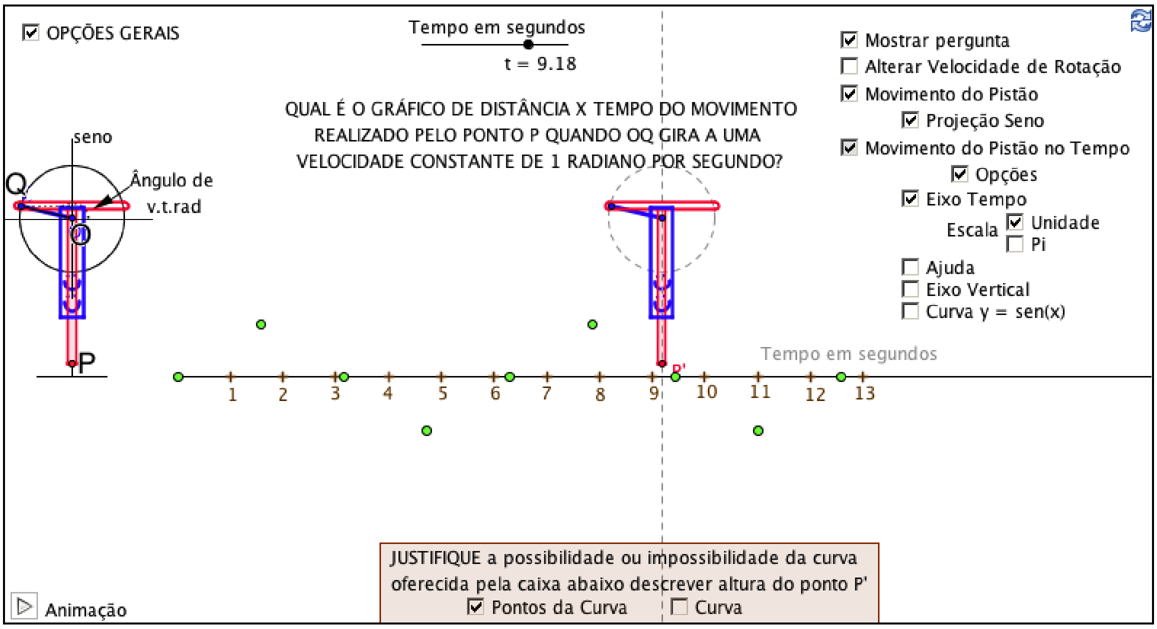

Figura 12: Applet Pistão

Na figura acima, quando o eixo OQ gira em torno de O (centro da circunferência), o ponto Q movimenta a haste vermelha para cima e para baixo. Dessa forma, a distância horizontal dos pontos Q e P é sempre constante, e igual a altura da haste. Como a distância horizontal é sempre a mesma, temos que V_y dos pontos Q e P são iguais, porém V_x do ponto P é igual a 0. Em outras palavras, podemos analisar o deslocamento vertical do ponto Q observando o ponto P, que apresenta o mesmo deslocamento e mais nenhum outro. A haste tem a função de decompor o movimento circular de Q.

Como nosso objetivo não era conduzir os participantes a dar a resposta adequada à questão, uma nova fase prospectiva se implantava. O questionamento, a partir do uso do *applet*, era de entender e explicar porque o gráfico pedido não é uma linha poligonal. Uma vez que essa resposta se mostra muito comum no problema da roda gigante, como vimos nas respostas dos professores, na figura 4.

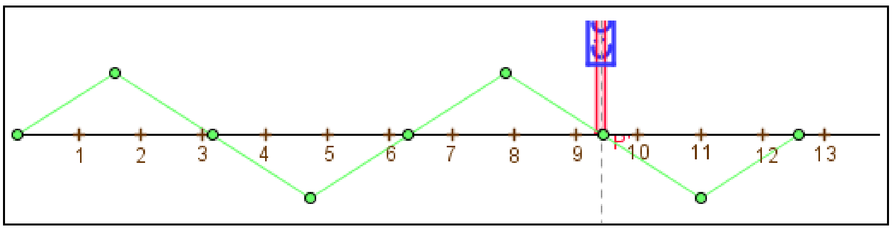

Figura 13: Gráfico "poligonal".

Essa questão está intimamente relacionada com a velocidade do deslocamento vertical do ponto P no pistão. Esse gráfico seria uma poligonal se a velocidade de deslocamento vertical do ponto Q fosse constante, mas isso não é possível já que a velocidade de rotação de

Q é constante. O fato de uma partícula ter um movimento circular constante, implica que seu deslocamento vertical desta não ser constante. O *applet* 2 tem como um dos objetivos promover essa discussão, considerando os pontos Q e P, o que também está relacionado com as questões da decomposição do movimento. Essa discussão aborda aspectos relativos à reposta que o gráfico no problema da roda gigante seria uma "linha poligonal".

Para aumentar o campo de experiências sensório-motoras-simbólicas elaboramos tarefas com calculadoras gráficas acopladas a sensores de movimento. (Para maiores detalhes deste uso ver BOLITE-FRANT, 2011).

Utilizamos a calculadora "TI-Nspire" da Texas Instruments a fim de que estudantes observassem a "constituição de gráficos", dado o deslocamento com o corpo para justapor o gráfico por nós gerado.

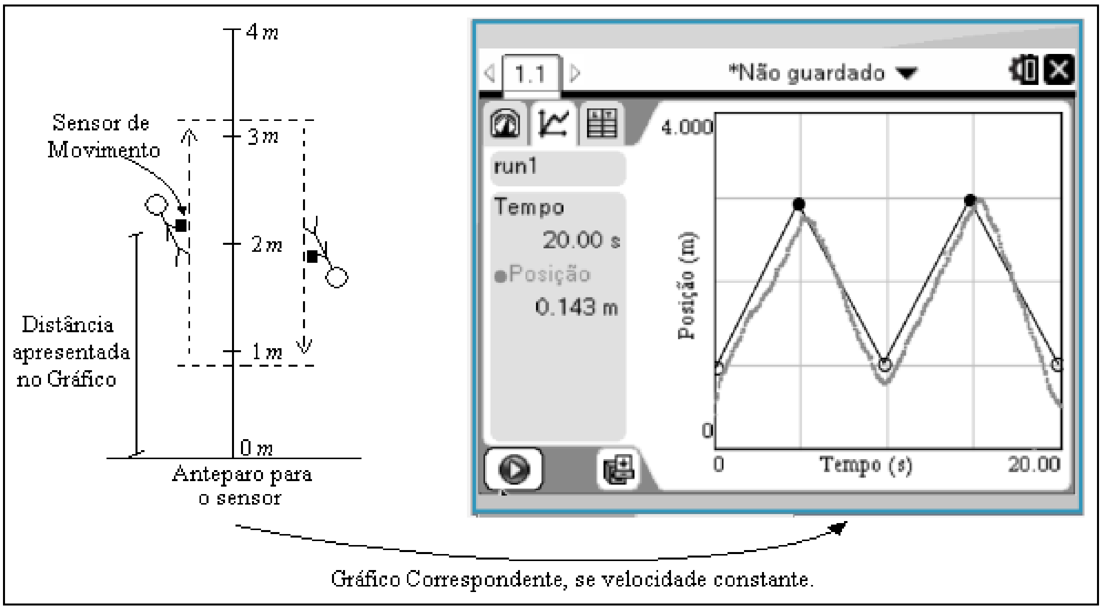

Figura 14: Gráfico espaço x tempo, Movimento Retilíneo

Atividades com deslocamentos sobre uma linha reta, de ida e vinda, poderia auxiliar os participantes na reflexão de quando o gráfico dado foi formado por segmentos de reta e quando era formado por uma curva como a senoidal, levando em consideração a velocidade do deslocamento.

Nessas fases prospectivas, além das respostas dos participantes, é fundamental destacar as influências de outras pesquisas vislumbrando as conseqüentes possibilidades pedagógicas para o desenvolvimento dos aplicativos. Como mencionamos na revisão bibliográfica, as pesquisas apresentadas embora sob diferentes prismas e objetivos, foram fundamentais para as nossas questões, assim como para o desenvolvimento da nossa investigação. Por isso nos pareceu interessante trabalhar com questões gráficas envolvendo o tempo como variável, uma vez que pensamos ser mais natural associar o tempo na reta real do que ângulos (mesmo que ângulos no contexto de seus valores numéricos, na unidade radiano).

Assim consideramos ser importante a articulação das representações utilizadas no eixo *x*, para uma melhor compreensão das variáveis. Por isso oferecemos essa possibilidade no aplicativo 2, e dessa forma, é possível escolher para o eixo tempo uma representação decimal, ou utilizando π, ou até uma sobreposição de ambas, a fim de comparação, o que pode favorecer uma reflexão de π como número real, e sua localização na reta.

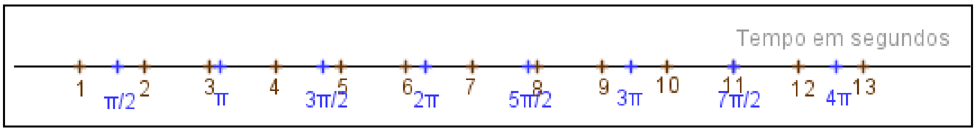

Figura 14: Representações no Eixo Tempo no *Aplet* Pistão

Note que o trabalho com os applets e a calculadora de movimento estão articulados de forma complementar. Enquanto o applet Roda Gigante pode propiciar uma reflexão sobre o tipo de gráfico em um movimento circular, no *applet* Pistão já temos a oportunidade de refletir sobre o movimento circular decomposto e, conjuntamente com a calculadora gráfica, discutir sobre a natureza do gráfico, já do movimento decomposto. Tudo isso tendo como pano de fundo as inferências que podemos fazer – conscientemente ou não – sobre o tempo, dado nossa experiência com o mesmo, que por sua vez viabiliza também uma reflexão sobre a variável real nas funções trigonométrica.

Considerações finais

Nossa experiência com diferentes mesas faz com que criemos a categoria mesa que não é nenhuma em particular e é todas ao mesmo tempo, incluindo as que ainda não conhecemos. Pois ao nos depararmos com um estilo novo de algum design certamente reconhecemos que se trata de uma mesa. No entanto, temos pouco tempo e poucas experiências com os conceitos ditos científicos, os que aprendemos na sala de aula de matemática, por exemplo.

Nossa elaboração de tarefas para a compreensão de fenômenos periódicos buscou apresentar não apenas uma animação gráfica, como encontramos no RIVED ou em outros *sites*, mas diferentes experiências, constituindo diversos cenários que possibilitem ao aprendiz relacioná-los com os gráficos trigonométricos. Enfatizamos mais uma vez que a preocupação era com a produção de significados e sentidos para tal e não com a fixação de determinados gráficos. Por exemplo, a tarefa de justapor um gráfico qualquer caminhando com a calculadora gráfica e o sensor trouxe o sentimento da variação no tempo, sobretudo tornando o que antes era abstrato em objetos manipuláveis.

Consideramos as tarefas propostas de fundamental importância, para além da manipulação das tecnologias envolvidas, a discussão e a interação entre os participantes. Tal discussão ocorre durante a exploração dos *applets* e das calculadoras com sensores.

Deixamos para outras pesquisas investigar de que modo essas tarefas envolvendo exploração com as tecnologias propostas, experimentações corpóreas de movimentos espaciais e seus respectivos gráficos em relação ao tempo. As discussões advindas no grupo poderão viabilizar não só reflexões sobre fenômenos periódicos, mas também favorecer um repertório de experiências que farão emergir novos conceitos matemáticos e físicos.

Bibliografia

ANTUNES, A. M. F.; GONZÁLES, R. L. **Análise do domínio de conceitos trigonométricos:** estudo exploratório realizado com alunos do Ensino Básico ao Superior de escolas de Beja. s. d. Disponível em: http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/FigueiredoLuengo02.pdf. Acesso em: 04/04/2010.

BARSALOU, L. W. **Grounded Cognition**. Annual Review Psychology. 2008

BARSALOU, L. W. **Simulation, situated conceptualization, and prediction.** Phil. Trans. R. Soc. B, n. 364, p. 1281–1289. 2009.

CASTRO, Monica Rabello de; BOLITE FRANT, Janete. **Modelo da Estratégia Argumentativa**: análise da fala e de outros registros em contextos interativos de aprendizagem. Curitiba: UFPR, 2011.

COBB, Paul; CONFREY, Jere; DISESSA, Andrea; LEHRER, Richard; SCHAUBLE, Leona. **Design Experiments in Education Research**. Educational Researcher, Washington, v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

COSTA, N. M. L. **Função seno e cosseno:** uma sequencia de ensino a partir dos contextos do mundo experimental e do computador. 156p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – FCET. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 1997

DAMÁSIO, A. R. **O erro de Descartes:** emoção, razão e o cérebro humano. Trad. portuguesa Dora Vicente e Georgina Segurado. São Paulo: Companhia das Letras, 1996.

FERNANDES, R. U. **Estratégias pedagógicas com o uso de tecnologias para o ensino de trigonometria na circunferência**. 134p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – FCET. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2010.

GOIOS, D. F. **Potencialidades didático-pedagógicos de um objeto para aprendizagem:** uma análise através da Teoria da Cognição Corporificada para o ensino de trigonometria. 125p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, 2010.

KANG, O. K. **A New way to teach Trigonometric Functions.** Sungkyunkwan University. Disponível em: http://www.icme-organisers.dk/tsg09/OkKiKang.pdf. Acesso em: 04/04/2012.

KENDAL, M., STACEY, K. **Teaching trigonometry.** Vinculum, n.34, v.1, p. 4–8, 1997.

KUPKOVÁ, E. **Developing the Radian Concept Understanding and the Historical Point of View.** n.18, p 73 - 85**.** Itália: Scienze Matematiche, 2008.

LAKOFF, G., JOHNSON. M. **Philosophy in the flesh:** the embodied mind and its challenge to western thought. New York: Basic Books, 1999.

MATLOCK, T. **Fictive motion as cognitive simulation.** Memory & Cognition, n.32, p. 1389-1400, 2004.

MEC. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio)** – Parte III: Ciencias da Natureza Matemática e suas tecnologias. Brasil, 1998

QUINTANEIRO, W. **Representações e definições formais em Trigonometria no Ensino Médio.** 161p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Instituto de Matemática Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: 2010.

RAMSCAR, M., MATLOCK T., BORODITSKY. Time, motion, and meaning: the experiential basis of abstract thought. In: MIX, Kelly S.; SMITH, Linda B.; GASSER, Michael (Ed.). **The spatial foundations of language and cognition**. Oxford: Oxford University Press. p. 67-82, 2010.

ROSCH, E. **Reclaiming concepts, journal of consciousness studies.** Editado por Rafael Nunez e Walter Freeman, n. 11-12, p. 61-77. 1999.

WEBER, K. **Students' understanding of Trigonometric Functions.** Mathematics Education Research Journal, v.17, n. 3, p. 91–112, 2005.