A reinvenção da aritmética pelas crianças: implicações pedagógicas da teoria piagetiana proposta por Constance Kamii para a aprendizagem de matemática

The reinvention of arithmetic by children: pedagogical implications of the Piagetian theory proposed by Constance Kamii for learning mathematics

Ricardo Leite Camargo
ESALQ – USP
ricardocamargo@usp.br

Maurício Bronzatto
Faculdade de Administração e Ciências Contábeis de São Roque
maub1970@ig.com.br

Resumo

Este artigo tem como objetivo reapresentar importantes implicações pedagógicas da teoria de Jean Piaget propostas por Constance Kamii para a aprendizagem de matemática no nível pré-escolar e nas séries iniciais do ensino fundamental. Tendo como premissa a perspectiva piagetiana de que a fonte de conhecimento matemático não é um fato empiricamente constatável, mas algo que tem origem na própria lógica da criança, os principais pontos abordados neste artigo são: a estreita relação entre o nível de abstração da criança e a forma como ela representa para si conceito numérico e eventos matemáticos; o objetivo de levar a criança a pensar flexivelmente sobre números e a construir uma rede de relações numéricas que a torne capaz de realizar de forma lógica as operações matemáticas; considerações sobre o prejuízo do ensino do valor posicional e dos algoritmos ao raciocínio numérico da criança; e a importância de os pequenos obterem um conhecimento fluente da soma, uma vez que é ao pensamento aditivo que tendem a recorrer para a resolução de problemas envolvendo a subtração, a multiplicação e a divisão. Kamii defende um ensino de matemática em que as crianças tenham a oportunidade de “lógico-aritmetizar” a realidade e possam reconhecer essa área do conhecimento como útil e funcional em suas vidas. Uma aprendizagem, portanto, que não se limite à “hora da matemática” e na qual as crianças, a partir de sua atividade própria, sejam impulsionadas a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e a ter novas ideias.

Palavras-chave: Aprendizagem da matemática. Constance Kamii. Desenvolvimento lógico-aritmético. Reinvenção da aritmética.

Abstract

The purpose of this article is to restate pedagogical important implications of the theory of Jean Piaget that were proposed by Constance Kamii for mathematics learning in pre-school level and in the early grades elementary school. Having premised on Piaget’s perspective that the source of mathematical knowledge is not an empirically verifiable fact, but something that comes from the child’s own logic, the main points discussed in this article are: the close relationship between the abstraction's level of child and the way how she represent for herself numerical concept and mathematical events; the purpose to lead the child to think flexibly about numbers and to build a network of numerical relationships that makes her able to perform mathematical operations of logical form; considerations about how the teaching of positional value and algorithms impairs the numerical reasoning of children; and the importance of the children get a fluent knowledge of the addition because they will resort to the additive thinking to solve problems involving subtraction, multiplication and division. Kammi defends a teaching of mathematics in which children have the opportunity of experiment the "logical-arithmetization" of the reality and they can to recognize this area of knowledge how useful and functional in their lives. A learning, therefore, that not get limit at "time of mathematics" and in which children, based in your own activity, are motivated to create, compare, discuss, evaluate, ask and to have new ideas.

Keywords: Constance Kamii. Logical-arithmetical development. Mathematics learning. Reinvention of the arithmetic.

Introdução

Como Piaget largamente demonstrou (PIAGET e INHELDER, 1959/1983; PIAGET e SZEMINSKA, 1964/1981), o conhecimento lógico-matemático, incluindo número e aritmética, não é adquirido diretamente do ambiente por *internalização* por meio dos sentidos, tampouco dado *a priori*, aguardando somente o amadurecimento do organismo para a manifestação progressiva de suas potencialidades inatas. Não está, portanto, pré-formado nem nos objetos, como queriam os empiristas, nem nos sujeitos, como defendiam os aprioristas. Trata-se, antes, de uma *construção* interna que cada indivíduo realiza à medida que interage com o ambiente. Quando se diz, portanto, que as crianças inventam a aritmética (KAMII e JOSEPH, 2005), isso não significa que elas constatam ou descobrem empiricamente algo que lhes estava encoberto. Em vez disso, o que ocorre é uma construção mental engendrada pela atividade que dirigem a algum objeto de conhecimento. Assim, se 4, por exemplo, é algo como 1 + 1 + 1 + 1 que as crianças inventam, por que 4 + 2, que é (1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1), também não pode ser inventado?

Vale recordar que o conhecimento lógico-matemático, diferentemente do físico e social[1] cuja fonte final encontra-se, respectivamente, nos objetos e nas convenções sociais, consiste de relações mentais estabelecidas pelo próprio indivíduo, das quais um bom exemplo é a relação numérica que, por meio da abstração reflexiva, ele cria quando interage com diferentes objetos. Embora, em termos teóricos, Piaget (1977a) tenha diferenciado a abstração reflexiva, que envolve as relações mentais, da abstração empírica, afeita à manipulação das propriedades físicas dos objetos, não deixou de considerar a interdependência entre uma e outra. Assim, não haveria como alguém construir a relação “diferente” se os objetos não apresentassem diferenças entre si. Por outro lado, não faria o menor sentido construir o conhecimento físico da cor azul, por exemplo, se não interviesse o conhecimento lógico-matemático da categoria cor, distinguindo-a de outras propriedades, como peso, forma, tamanho etc. Evidencia-se, assim, a necessidade de uma estrutura lógico-matemática, produto da abstração reflexiva, para que os fatos da realidade não sejam concebidos como fragmentos isolados de conhecimento, sem relação com o conhecimento já construído e organizado.

[1] Piaget (1967/1973) distingue três tipos de conhecimento, considerados sua origem e modos finais de estruturação: conhecimento físico, conhecimento social e conhecimento lógico-matemático.

Partindo da teoria de Jean Piaget sobre a universalidade do conhecimento lógico-matemático, logo tendo em vista o fato de que as crianças constroem seus próprios conceitos numéricos, Constance Kamii (KAMII e DECLARK, 1986; KAMII e HOUSMAN, 2002; KAMII e JOSEPH, 2005) teve amplamente comprovada sua hipótese de que, para além desses conceitos, as crianças seriam capazes de inventar aritmética para si mesmas. Conhecer como as crianças adquirem conceitos numéricos é, pois, determinante para incentivar o seu processo de aprendizagem da aritmética.

Neste artigo, procuraremos reapresentar importantes implicações pedagógicas e psicopedagógicas da teoria de Jean Piaget propostas por Constance Kamii e colaboradores para a aprendizagem de matemática no nível pré-escolar e nas séries iniciais do ensino fundamental. O interesse de Kamii pelo tema já dura meio século, e suas contribuições são tributárias de uma intensa atuação como professora de educação infantil, inúmeras pesquisas e um dedicado trabalho junto a professores de sala de aula para ajudá-los a basearem sua prática em uma teoria científica de *como* as crianças aprendem aritmética a partir dos procedimentos que elas mesmas inventam. Comecemos com a estreita relação entre o nível de abstração da criança e a forma como ela representa para si conceito numérico e eventos matemáticos.

Diferentes representações de eventos matemáticos em diferentes níveis de abstração

Alguns dos modos correntes do ensino contemporâneo da matemática pressupõem que as crianças pequenas vão do "concreto" (objetos) ao "semiconcreto" (figuras) e só então chegam ao "abstrato" (numerais escritos). Para Piaget, ao contrário, o trabalho com figuras não é necessariamente um caminho para a criança tornar-se capaz de lidar com símbolos matemáticos. Para ele, aliás, *símbolos* e *sinais* possuem significados diferentes: enquanto aqueles dizem respeito a figuras e marcas de contagem, estes são reservados para palavras e numerais escritos. As origens de uns e outros também divergem: os símbolos, segundo Piaget, por guardarem uma semelhança com o objeto representado, podem ser inventados pela criança quando deles ela tiver necessidade. É o caso, por exemplo, de 8 maçãs ou 8 pessoas para a ideia de "oito", ou 8 marcas de contagem para simbolizar as 8 maçãs. Por sua vez, os sinais (as palavras faladas "maçã", "oito" ou o numeral escrito 8), como são convenções sociais, não podem ser inventados pela criança. Além disso, eles não lembram, como as figuras e as marcas de contagem, os objetos representados. Os numerais escritos, portanto, não se desenvolvem a partir de símbolos, como se um conceito abstrato de número sucedesse a algo como um “número concreto” (KAMII e HOUSMAN, 2002). Basta lembrar que, nas provas de conservação (PIAGET e SZEMINSKA, 1964/1981), os sujeitos têm diante de si objetos concretos e, não obstante, alguns se mostram incapazes de atinar com a invariância dos conjuntos quando a disposição espacial de seus elementos sofre algum tipo de alteração. É que a conservação depende dos conceitos numéricos, e há sujeitos que ainda não os adquiriram. Embora os termos das coleções sejam concretos e observáveis, o número que os representa é sempre abstrato, construído por meio de abstração reflexiva.

As crianças pequenas representam diferentes ideias em diferentes níveis de abstração. Como notou Piaget (1977b), elas representam suas ideias sobre a realidade e não a própria realidade. Em outras palavras, a representação é o que as pessoas fazem em seus respectivos níveis de abstração. É assim, por exemplo, que, para três objetos, a criança espontaneamente poderá apresentar representações numéricas dos seguintes tipos: AEI, 123, 333, o que revela sua atenção a cada objeto, e não à quantidade total como o fariam as crianças mais velhas, cuja representação tenderá à escrita, nesse caso, de um único numeral, e não mais de três símbolos ou sinais.

Quanto aos materiais manipuláveis, que a criança usa como símbolos para a resolução de problemas matemáticos (fichas, contadores, entre outros), sua utilidade, segundo Kamii e Housman (2002), depende das relações que as crianças são capazes de fazer, por meio de abstração reflexiva. Sua preferência, no entanto, geralmente recai sobre o desenho, a contagem nos dedos e, quando estes são insuficientes, sobre as marcas de contagem. Desde que tenham oportunidade, por exemplo em forma de uma folha de papel em branco com apenas o problema escrito no alto, logo sem a limitação que as propriedades de alguns materiais impõem a suas ideias, “[...] elas têm uma chance de organizar seus pensamentos e decidir como externalizá-los no papel” (p. 42). A utilização dos dedos é um recurso muito útil ao pensamento e envolve diferentes níveis de abstração, dos quais os mais evidentes são “contar tudo” (quando, ao somar 5 + 2, contam-se 5 dedos, depois 2 e, por fim, todos os 7, começando com “um”) e “contar para frente” (no caso de 5 + 2, parte-se do 5 e diz-se simplesmente “seis-sete”). A contagem “para a frente” é uma dificuldade para muitas crianças, que se explica por sua incapacidade de lidar com a relação parte-todo, em razão de ainda não terem atingido o nível das operações lógico-matemáticas.

Ainda sobre a representação, Kamii e Housman (2002) lembram que, para Piaget, objetos, figuras e palavras não representam, já que a representação é uma ação que somente pessoas podem realizar. Ou seja, é sempre um ser humano que usa um símbolo para representar uma ideia, e ele o faz, como já foi dito, num nível alto ou baixo de abstração reflexiva. Decorre disso, segundo as autoras, a impossibilidade de blocos de base-10 representarem unidades, dezenas e centenas, como supõem alguns métodos de ensino da matemática. As crianças assimilam os símbolos e os sinais, ou seja, representam significados para si mesmas, de acordo com seu nível de abstração. Quando ainda não construíram o conceito de número, as crianças somente são capazes de pensar *sucessivamente*, e não *simultaneamente*, em "um 10" e "10 unidades", portanto não podem atribuir o mesmo significado que um adulto a um bloco de base-10. É por isso que quando se lhes apresentam, por exemplo, 34 palitos agrupados em três grupos de 10 e 4 palitos soltos e pede-se-lhes que os contem de 10 em 10, muitas o fazem dizendo: "dez, vinte, trinta", para os grupos de 10, e "quarenta, cinquenta, sessenta, setenta", para os 4 palitos não agrupados. A impossibilidade de pensar ao mesmo tempo em dezenas e unidades as faz procederem dessa forma. Linda Joseph (KAMII e JOSEPH, 2005) chegou à mesma conclusão depois de realizar uma atividade com alunos de 2ª série, pedindo-lhes que estimassem a quantidade de confeitos de um pacote despejados numa tigela. As crianças decidiram que contá-los de 10 em 10 levaria a uma solução mais rápida[2]. A uma determinada altura da atividade, a professora interveio, primeiro pedindo que os alunos circulassem com um fio cada grupo de 10 confeitos e, em seguida, cada grupo de 100. Não obstante essa providência, a maior parte das crianças, quando solicitadas a fazerem a contagem total, procedeu como se o fio não existisse, contando os confeitos de 10 em 10, da mesma maneira como elas haviam feito inicialmente.

Conforme Kamii e Housman (2002), a criança tem ambos os sistemas quando constrói o de dezenas a partir do de unidades. Assim, no caso dos 34 palitos, depois de contarem de 10 em 10 os elementos agrupados, uma vez que estão pensando ao mesmo tempo nas unidades, saberão mudar para a contagem de um a um quando se ocuparem dos 4 palitos restantes. Além disso, a síntese entre a ordem e a inclusão hierárquica, essencial para o conceito de número, está presente: da mesma forma como incluem 1 em 2, incluem 10 em 20, e assim por diante. As crianças chegam a isso quando são incentivadas a pensar: se souberem, por exemplo, que 9 + 1 = 10, pensarão simultaneamente em uma *dezena* e em *unidades* e inventarão uma maneira rápida de solucionar algo como 9 + 6, mudando-o, quem sabe, para (9 + 1) + 5.

[2] Há muitas nuances interessantes depreendidas do comportamento das crianças à medida que se envolviam com esta atividade. Por exemplo: tendo chegado ao número 100 com a tigela praticamente cheia, elas duvidavam de que poderia haver mais uma centena por contar. E, no entanto, o número total era de 426 confeitos.

Em concordância com o que já vimos, blocos de base-10 não são "números concretos" ou uma representação do sistema de base-10. As crianças não podem construir seja o sistema de unidades, seja o de dezenas, por abstração empírica de objetos. Pensar em "um 10" e em "10 uns", simultânea ou separadamente, depende do nível de representações de que a abstração da criança é capaz, e não, no caso em questão, dos blocos de base-10 (KAMII e HOUSMAN, 2002).

Essas autoras também discutem a representação de operações por meio de equações, das quais os problemas escritos de parcela desconhecida (como 4 + ___ = 6), largamente aplicados nas crianças das séries iniciais do ensino fundamental, constituem um bom exemplo. Não raro, muitas crianças, diante de um problema como este, escrevem "10" ou um número aleatório, dada a sua dificuldade de leitura ou representação. Fosse o problema escrito como 4 + 2 = ___, este demandaria pensamento numa única direção. Representado, porém, como 4 + ___ = 6, há uma complexidade que requer a reversibilidade do pensamento, o que torna sua solução muito difícil para crianças pré-operatórias. Essa dificuldade reside, sobretudo, na forma como o problema é escrito. Formulado, no entanto, a partir de alguns jogos matemáticos com cartas, sua resolução torna-se muito mais fácil.

Um estudo que Kamii e colaboradores levaram a efeito (KAMII e HOUSMAN, 2002) demonstrou que, com o pensamento reversível, crianças de 1ª série, com quem suas professoras jogavam jogos matemáticos rotineiramente, embora não tivessem recebido nenhum tipo de instrução formal prévia em parcela desconhecida, adquiriram a capacidade de ler corretamente as representações dessas operações, bem como de solucioná-las adequadamente. Percebe-se que um alto nível de abstração faculta às crianças uma melhor compreensão da representação escrita das operações, e isso porque elas, e não os sinais escritos em si, passam a construir os seus próprios significados.

A dificuldade de crianças de 1ª série com a leitura de equações evidenciou-se num outro estudo que Kamii e Ozaki propuseram (KAMII e HOUSMAN, 2002) nos Estados Unidos e no Japão. Solicitadas a darem a resposta a problemas como 4 + 2 = ___, quase todas obtiveram êxito. Na sequência, as experimentadoras colocavam algumas dezenas de fichas diante das crianças, corriam o dedo sobre a equação e pediam a elas que fornecessem de fichas a mesma quantidade que estava escrita na equação. Enquanto dois terços das crianças separavam corretamente 6 fichas, cerca de 1 terço delas apresentavam 12, pois liam a equação como "4 2 6" ou "4 + 2 6". Embora pudessem ler e definir cada um dos sinais presentes na equação, as representações (significados) de que eram capazes seguiam o nível de suas abstrações.

O mesmo estudo ainda dirigia uma solicitação à criança para que traduzisse em numerais escritos o seguinte evento matemático: o experimentador, depois de dizer que colocaria três fichas dentro de um recipiente, deixava-as cair simultaneamente. Em seguida, anunciava que estaria adicionando duas, e deixava as duas fichas caírem ao mesmo tempo no recipiente onde já estavam as 3 anteriores. Muitas crianças escreviam “5”, e então o experimentador intervinha repetindo a operação com as 3 fichas iniciais, após o que pedia que as crianças representassem este primeiro evento, enfatizando, na sequência, o termo “adicionando” quando derrubava 2 fichas no recipiente. Embora tais crianças já trabalhassem com expressões convencionais do tipo 3 + 2 = 5, poucas representaram a operação dessa forma. Um número grande escreveu apenas dois numerais: “3 + 2”, “3 + 2 =”, “32” (representando os dois totais originais) ou “35” (representando o total original e o total final). Bastante instrutiva foi a justificativa de uma criança que escreveu “5”: ela não podia escrever “3”, pois as três fichas já estavam no “5”, o que esclarece, em boa medida, por que tantas crianças escreveram “3” e “2” ou “3” e “5”. No primeiro caso, 3 fichas foram colocadas, e então mais 2; no segundo, inicialmente havia 3 fichas, depois havia 5. A escrita de três numerais implica pensar hierarquicamente sobre a relação parte-todo, algo bem difícil para a maioria dessas crianças. É o que se depreende também de sua recusa em representar a operação como “3 + 2 = 5”, que nada mais é do que uma recusa em representar cada total original (3 e 2) duas vezes (uma vez quando o 3 e o 2 são escritos e outra vez no 5 como partes do total de ordem superior).

Na sequência, ao tratarmos dos objetivos da adição, subtração, multiplicação e divisão na aprendizagem de crianças pequenas, seguiremos a premissa de Constance Kamii de que o ensino da matemática deve dar a essas crianças a oportunidade de “lógico-aritmetizarem a realidade”. Procuraremos repercutir a relevância que a autora confere à construção de uma rede de relações numéricas para que a criança pense flexivelmente sobre números e realize de forma lógica as operações matemáticas. Apresentaremos suas considerações sobre o prejuízo do ensino do valor posicional e dos algoritmos ao raciocínio numérico da criança. Destacaremos, ainda, a ênfase de Kamii num conhecimento sólido da soma como subsídio aos pequenos para resolução de problemas envolvendo as demais operações.

A adição e a construção de uma rede de relações numéricas

Do ponto de vista piagetiano (PIAGET e SZEMINSKA, 1964/1981), como a fonte de conhecimento matemático está dentro da criança, pode-se esperar que ela invente a aritmética a partir do cotidiano, à medida que conta e soma espontaneamente balas, brinquedos, talheres, pessoas, animais etc., da mesma forma como nossos ancestrais o fizeram quando precisaram resolver problemas práticos ligados ao mundo do trabalho. A aritmética é, portanto, “[...] a aritmetização lógica da realidade” (KAMII e HOUSMAN, 2002, p. 84). Ao manusearem alguns conteúdos (figurinhas, bolinhas de gude, carrinhos etc.), que sempre são passíveis de receberem acréscimos, as crianças adquirem a lógica da adição (algumas figurinhas e mais algumas). Posteriormente, partindo de seu pensamento sobre esses conteúdos, a criança chega à adição de números sem conteúdos (por exemplo, 3 + 5).

Para Kamii e Housman (2002, p. 84), a adição se define como “[...] a ação mental [...] de combinar dois totais para criar um total de ordem superior no qual os totais anteriores se tornam duas partes” (3 e 5 seriam essas duas partes num total de ordem superior 8). Uma vez que as relações de parte-todo, como já mencionado, são muito difíceis para crianças pequenas, elas geralmente “contam tudo” em vez de “contarem para a frente” quando adicionam números. Segundo as autoras, as crianças precisam contar a partir de *um* pela seguinte razão:

> [...] quando elas contam três dedos, “três” constitui um total; quando elas subsequentemente contam cinco dedos, “cinco” constitui um outro total. Uma vez que é difícil para elas pensar simultaneamente nos dois totais que fizeram e em um total de ordem superior, elas “homogeneízam” o “três” e o “cinco” transformando ambos em “1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1”. Eliminando assim os totais originais, elas evitam a dificuldade de pensar hierarquicamente (KAMII e HOUSMAN, 2002, p. 85).

De acordo com as autoras, e em consonância com o que sabemos acerca da construção do número na teoria piagetiana (PIAGET e INHELDER, 1959/1983; PIAGET e SZEMINSKA, 1964/1981), o “contar para a frente” não se reduz a uma mera habilidade. Trata-se, antes, de uma ação mental, produto de abstração reflexiva, de que a criança passará a lançar mão quando superar a necessidade de “contar tudo”.

A adição não é um “fato” que existe no mundo exterior, mas algo que tem origem na própria lógica da criança. Um fato, tal como 3 fichas sobre a mesa, é algo empiricamente observável. Já o número 3 não. Tampouco 3 + 5 = 8. De acordo com Piaget (1977b), um fato é sempre uma assimilação (interpretação), o que explica uma criança não atinar com a impossibilidade lógica de ter fornecido “5” como resposta para a adição 3 + 5. Como um fato é sempre uma construção de um indivíduo em seu nível de desenvolvimento, posteriormente, com uma lógica mais avançada, a mesma criança até poderá dar uma resposta incorreta para 3 + 5, porém não mais igual ou menor que uma das parcelas.

Assim, quando as crianças de 1ª série realizam adição de um dígito, tem-se em vista não que se recordem de alguns "fatos de adição" que pouco ou nenhum sentido têm para elas, mas que se tornem capazes de pensar flexivelmente sobre números e construir uma rede de relações numéricas. Elas podem, por exemplo, pensar em 7 como metade de 14, como 2 a mais que 5, e 3 a menos que 10, que, por sua vez, é o mesmo que 5 + 5 etc. Nessa rede, além da adição, temos também a subtração e o princípio da multiplicação e divisão. Quando estão profundamente enraizadas na lógica das crianças, e não meramente memorizadas, relações como 3 + 3 = 1 + 2 + 3 = 1 + 5 se tornam parte de seu senso numérico e são facilmente lembradas.

Com vista a definir os objetivos para o trabalho com a adição junto a crianças de 1ª série, Kamii (KAMII e HOUSMAN, 2002) realizou pesquisas junto a este público, aplicando-lhe problemas de adição com parcelas de 1 a 6 e de 7 a 10. Essas crianças jogaram jogos matemáticos por cerca de 50 minutos todos os dias durante o ano escolar, aprendendo aritmética sem as convencionais listas de exercícios. Os testes com parcelas de 1 a 6 foram aplicados 4 vezes ao longo do ano escolar, havendo progresso em todos os itens a cada nova aplicação. As seguintes combinações se mostraram mais fáceis:

- Os duplos 2 + 2, 5 + 5, 10 + 10 (igualmente fáceis), seguidos de 3 + 3, 4 + 4, 6 + 6, 8 + 8 e 7 + 7 (os dois últimos duplos igualmente difíceis). Números como 5 e 10 são "mais amigos" que outros.
- As combinações em que 1 é adicionado a qualquer número, já que qualquer número + 1 é simplesmente o número seguinte. Embora maior que a soma de 2 e 3, a soma de 6 e 1 foi, por exemplo, considerada mais fácil que a primeira.
- As combinações em que 2 é adicionado a qualquer número.

Um dado digno de nota é a invenção da *comutatividade* pelas crianças, quando seu pensamento se torna reversível, por volta dos sete a oito anos de idade: 5 + 3 mostrou-se mais fácil que 3 + 5 na primeira aplicação do teste, no início do ano escolar. Ao final do período, na quarta aplicação, suas porcentagens progrediram para o mesmo nível, o que sinaliza que, diante de 3 + 5, a criança opta pela comutação 5 + 3.

Destaque-se que para Kamii a essência da matemática é o raciocínio das crianças (abstração), os sinais matemáticos se constituindo apenas como o aspecto superficial, convencional da aritmética. Desde que o conhecimento lógico-matemático das crianças seja sólido, estando elas, portanto, num alto nível de abstração, a representação desse conhecimento é facilmente manejada. Produzir respostas corretas para problemas como os relacionados logo abaixo não garante que as crianças compreendem perfeitamente bem a relação parte-todo neles envolvida, donde a convicção da autora de os testes de parcelas desconhecidas não serem um objetivo válido para crianças de 1ª série, cujo aprendizado, conforme a experiência de Georgia DeClark largamente o atestou (KAMII e DECLARK, 1986), acontece apesar das folhas de exercícios.

$$4 + 2 = \underline{\qquad\quad} \qquad\qquad 4 + \underline{\qquad\quad} = 6$$

$$\underline{\qquad\quad} + 2 = 6 \qquad\qquad \begin{array}{r} 4 \\ +\,2 \\ \hline \end{array}$$

Em relação à adição com parcelas acima de 10, há recomendação de alguns autores de que essa aprendizagem passa inicialmente pelo ensino do valor posicional[3] com a utilização, entre outros materiais, de feixes de 10 palitos, blocos de base-10, Kamii (KAMII e HOUSMAN, 2002) opõe, como já vimos, a argumentação de que a ideia de *uma dezena* é produto de abstração reflexiva. Estando ausente essa construção, sua representação está impedida, assim como o entendimento sobre o valor posicional. A propósito, Kamii (KAMII e DECLARK, 1986) comandou algumas investigações com crianças a quem o valor posicional era tradicionalmente ensinado. Sua hipótese considerava que isso não era possível. O procedimento utilizado era bem simples: apresentavam-se 16 fichas para que a criança as contasse e, em seguida, as desenhasse e escrevesse o numeral 16, correspondente à quantidade de fichas representadas no desenho. A pesquisadora, então, circulava o "6" no "16" escrito pela criança e perguntava-lhe o que isso significava no desenho das fichas. Pedia-se à criança que o demonstrasse circulando algumas das fichas de seu desenho. Na sequência, o mesmo era feito com o "1" em "16". Por fim, depois de circular o "16", perguntava-se à criança o que "tudo isto" significava. Não obstante os esforços despendidos no ensino de dezenas e unidades, nenhuma das crianças foi capaz de dizer que "1" em "16" representava 10. Tendo sido essa mesma técnica reaplicada em crianças mais velhas, o percentual de crianças que circularam 10 fichas para mostrar o que o "1" significava em "16" não foi além de 51% na 4ª série e de 60% na 6ª série. Esses resultados referendam a tese de Kamii (KAMII e HOUSMAN, 2002; KAMII e JOSEPH, 2005) de que o conhecimento do valor posicional decorre dos problemas de adição, e não de atividades específicas, isoladas, destinadas a promovê-lo.

Os muitos estudos e observações realizados por Kamii e colaboradores (KAMII e DECLARK, 1986; KAMII e HOUSMAN, 2002; KAMII e JOSEPH, 2005) levaram-nos à conclusão de que os algoritmos, como os de "transporte" e "empréstimo", são prejudiciais

[3] Refere-se "[...] ao conhecimento socioconvencional que, por exemplo, em 333, o primeiro 3 significa trezentos (três centenas), o segundo 3 significa trinta (três dezenas) e o terceiro 3 significa três (três unidades)" (KAMII e JOSEPH, 2005, p. 21).

ao raciocínio numérico das crianças à medida que “desensinam” valor posicional e as encorajam a abandonar seu próprio pensamento. Seja, por exemplo,

$$\begin{array}{r} 29 \\ +16 \\ \hline \end{array}$$

Quando usam seu próprio pensamento, crianças de 2ª série somam primeiramente as dezenas, e então as unidades, podendo, nesse caso, inventar procedimentos que lhes facilitem a operação, tais como: “29 + 1 = 30, 30 + 15 = 30 + 10 + 5 = 45”; ou: “20 + 10 = 30, 30 + 9 + 6 = 30 + (9 + 1) + 5 = 45”. Como, ao contrário, o algoritmo impede que se comece pelas dezenas, as crianças declinam de seu raciocínio para seguir as regras do algoritmo: “nove e seis dão quinze; coloca o cinco; vai um; dois e um dão três; com mais um, quatro...” Além disso, uma vez que as crianças pequenas pensam que o “2” de “29” significa dois, e não vinte, o uso do algoritmo acaba reforçando esse erro, contribuindo para “desensinar” o pouco que entendem de valor posicional.

Diferentemente de alguns sistemas de ensino que aguardam a segunda série para apresentar problemas com reagrupamento (do tipo 18 + 5, 15 + 16 etc.), Kamii aposta na precocidade da apresentação desses problemas a fim de que a criança possa inventar dezenas, em vários contextos, partindo de seus sistemas de unidades. “Não dar nada além de problemas do tipo 13 + 13 dia após dia é uma maneira segura de estimulá-las a *não* pensar sobre dezenas e unidades *simultaneamente*” (KAMII e JOSEPH, 2005, p. 64).

Kamii (KAMII e HOUSMAN, 2002) também testou duas turmas de crianças de 1ª série e verificou o mesmo prejuízo numa delas, à qual o algoritmo tinha sido ensinado para a adição de dois dígitos sem “reagrupamento” (“transporte”). O problema submetido às crianças era o seguinte:

$$\begin{array}{r} 22 \\ +\ 7 \\ \hline \end{array}$$

Os resultados: 67% da classe sem algoritmo respondeu corretamente contando para a frente a partir de 22, contra apenas 37% de respostas corretas da classe com algoritmo. Metade desta última classe forneceu respostas como 10, 11 ou 12, produto da soma de todos os dígitos como se fossem unidades (2 + 2 + 7), o que não ocorreu com nenhuma criança da classe sem algoritmos, possivelmente por já entenderem que a soma precisa ser maior que cada uma das parcelas. Quando cometeram erros, suas respostas foram maiores que 22. Respostas desmedidas, como “9 e 2, 92”, “um 2 e um 9” e “9”, também compuseram o resultado da classe à qual se ensinou a somar colunas de um.

Dentre as investigações que Kamii (KAMII e JOSEPH, 2005) realizou para testar a hipótese de que os algoritmos eram a causa do conhecimento deficiente que as crianças tinham do valor posicional, destacamos duas entrevistas de aritmética com solicitação de cálculo mental. A primeira junto a turmas concluintes de 2ª série (turmas com e sem ensino de algoritmos), cujo problema, apresentado sob as formas vertical e horizontal, era: 7 + 52 + 186. A segunda pesquisa, com turmas de 3ª e 4ª séries (que misturava alunos que haviam aprendido algoritmos e alunos que jamais haviam passado por este tipo de ensino), apresentava um problema semelhante: 6 + 53 + 185. As diferenças consideráveis apareceram na apresentação horizontal do problema: quatro vezes mais estudantes de 2ª série da turma "sem algoritmos" forneceram a resposta correta em relação à turma "algoritmos" (45% X 12%). A discrepância, no entanto, nas respostas erradas desses últimos é alarmante, o que demonstra falta completa de senso numérico[4]. E pior: a indiferença com que anunciam resultados tão absurdos parece denunciar certo automatismo, como consequência da renúncia de pensar. Resultado muito parecido verificou-se na pesquisa com as turmas de 3ª e 4ª séries. Destaque-se que as crianças da 4ª série haviam aprendido algoritmos durante um período de um a quatro anos e, no entanto, seu desempenho foi pior do que o das turmas de segunda e terceira séries que nunca haviam aprendido algoritmos. Essa diferença entre uma e outra turma de 3ª série se evidencia e, diríamos, se acentua, quando o experimentador, depois de ter colhido respostas corretas de ambas para, por exemplo, 13 X 4 e 32 – 18 (apresentadas na disposição vertical), fornece fichas aos participantes e pede-lhes que expliquem como raciocinaram. A incompreensão do valor posicional não pode mais se manter sob disfarce. Se não é assim, como explicar o fato de que nenhum estudante de uma turma de 2ª série pesquisada ("com algoritmos") (KAMII e JOSEPH, 2005) tenha sabido como representar com fichas o "transporte" empregado em 17 + 16 (na vertical)?

A pertinência desses resultados pode, ainda, ser referendada por um outro, obtido a partir de um teste com problemas de estimativa aplicados em dois grupos de crianças de 2ª série, um construtivista e outro que seguia o programa de ensino convencional de matemática (KAMII e JOSEPH, 2005). As crianças tinham 4,5 segundos para estimar o resultado de operações como 98 + 43 e 347 + 282. Os resultados do grupo construtivista foram sensivelmente melhores em todos os problemas. Para a primeira operação, por exemplo, cujas alternativas eram "aproximadamente 110", "aproximadamente 140",

[4] Kamii e Joseph (2005) afirmam que o problema escrito no sentido vertical facilita a descoberta das crianças sobre o valor posicional. No entanto, para evitar a dependência do alinhamento vertical das colunas, também é importante que o professor apresente-lhes o problema no sentido horizontal.

“aproximadamente 170” e “não tenho ideia”, 69% do grupo construtivista contra 46% do grupo tradicional escolheram “aproximadamente 140”. A lógica da maioria das respostas de um grupo e a ausência dela, em boa medida, nas do outro evidenciam como se sobressaem, em relação às crianças a quem meramente se ensinou como fornecer respostas corretas, aquelas outras que receberam investimentos em sua habilidade de pensar.

A subtração como produto da consolidação do conhecimento da adição

De acordo com a teoria de Piaget (PIAGET e INHELDER, 1959/1983; PIAGET e SZEMINSKA, 1964/1981), a subtração apresenta um grau de dificuldade maior do que a adição. Enquanto esta requer uma “ascensão” de dois totais para um total de ordem superior (por exemplo, 5 + 4), aquela compreende dois níveis hierárquicos: “descender” do total (“9”) para uma parte (“5”) e, ao mesmo tempo, “ascender” de volta para o total (“9”) antes de “descender” para a outra parte (o número desconhecido na operação, “4”). De novo, reencontramos a conhecida dificuldade das crianças pequenas em lidar com as relações parte-todo e em pensar em duas direções opostas simultaneamente. Nesse final descendente, as crianças que sabem que 5 + 4 = 9 usarão tal conhecimento da soma para chegar ao resultado correto da subtração 9 – 5.

Kamii (KAMII e HOUSMAN, 2002) chama a atenção para um fenômeno comum em salas de 1ª e 2ª séries: diante de uma lista com problemas de adição e subtração, as crianças frequentemente cometem erros de adição-para-subtração, e raramente o inverso. É que a adição é tão natural para elas quanto a subtração é antinatural. Piaget, aliás, salientou esta característica do pensamento pré-operacional: a primazia do aspecto positivo da percepção, ações e cognição sobre o aspecto negativo (PIAGET e INHELDER, 1959/1983). Assim, na primeira infância, diante de uma bola vermelha, a criança tende a pensar, a princípio, positivamente neste objeto: trata-se de “uma bola”, e de uma bola “vermelha”. Somente mais tarde será capaz de raciocinar negativamente, estabelecendo relações como: “não um carrinho”, “não um animal”, “não azul” etc. Vemos isso nos estudos de Piaget (PIAGET e INHELDER, 1959/1983) sobre as complementaridades (sendo, por exemplo, *A* a classe dos patos e *B* a classe das aves, *A’* [a classe das aves não patos] seria a complementar de *A* sob *B*): será preciso aguardar o nível das operações lógico-matemáticas para que a criança estabeleça as relações entre a classe secundária ou complementar e a inclusão, sendo capaz de agrupar os elementos em *A’* em função de *B* e de *A* (ou seja, *A’* = *B* – *A*; ou, em outras palavras, conceber os *A’* como os *B* não *A*).

Diante da técnica de Piaget (PIAGET e INHELDER, 1959/1983) de apresentar à criança uma série de cartões representando frutas (várias maçãs, uma pera, uma banana, uma melancia etc.) e pedir-lhe uma repartição dicotômica em duas caixas, bem como uma inscrição adequada para designar o conteúdo de cada uma, somente as crianças do nível III foram capazes de descrever a classe complementar *A'* negativamente em relação a uma classe de ordem superior. "Todas menos as maçãs", "as frutas sem as maçãs" são exemplos de expressões dessas crianças que denotam a complementaridade estruturada em função da inclusão.

A dificuldade da subtração é parte da dificuldade das crianças pequenas em pensar negativamente sobre objetos e ações. Essa operação é, portanto, um desenvolvimento secundário em relação à adição, donde a hipótese de que as crianças se tornam fluentes na subtração quando seu conhecimento da adição é fortalecido (KAMII e JOSEPH, 2005). Na verdade, crianças de pré-escola e 1ª série tendem a usar adição sempre que possível quando se trata de resolver problemas de subtração. Este, aliás, é o motivo pelo qual Kamii aconselha a aplicação de muitos jogos de adição e poucos de subtração: a contagem implicada nos primeiros, que é muito útil para as crianças aprenderem a somar, deveria, no caso da subtração, que pode ser derivada de somas, ser evitada em proveito do pensamento.

Os problemas de subtração geralmente se configuram sob uma ou outra das quatro modalidades a seguir, conforme Kamii e Housman (2002, p. 112):

> *Separação*. Você tem 7 doces. Você me dá 3 deles. Com quantos doces você ficou?
> *Parte-parte-todo*. Há 6 frutas na tigela. Duas são maçãs e o resto são peras. Quantas peras há na tigela?
> *Comparação*. Você tem 7 doces. Eu tenho apenas 3 doces. Quantos doces você tem a mais que eu?
> *Equalização*. Eu tenho 3 velinhas. Eu preciso de 7 para um bolo de aniversário. Quantas mais eu preciso?

Esses quatro tipos de problemas supõem diferentes relações parte-todo: na *separação*, uma parte é tirada do todo. A *parte-parte-todo* é semelhante, mas nenhuma parte é tirada. A *comparação* envolve dois totais, exigindo que a criança transporte mentalmente o total menor para o maior e realize uma relação de parte-todo dos dois totais, algo mais difícil para ela. Já a *equalização* começa com um total e requer seu aumento para um total maior.

Kamii (KAMII e HOUSMAN, 2002) testou 183 crianças de 1ª a 5ª séries em uma escola pública de Genebra, Suíça, submetendo-lhes os problemas acima de separação, comparação e equalização. A separação revelou-se o mais fácil deles: metade das crianças de 1ª série e a totalidade de 2ª série deram respostas corretas a eles. O mais difícil dos problemas foi aquele envolvendo comparação: apenas 10% das crianças de 1ª série responderam corretamente. Sessenta e sete por cento responderam 7, num indício de que, pelas razões antes mencionadas, a pergunta “Quantos doces você tem a mais...” acaba sendo compreendida como “Quantos você tem?” Na 2ª série, 50% tiveram dificuldade, que persistiu entre 20% das crianças de 3ª série. A equalização, por sua vez, como envolve apenas um total, encontrou menos dificuldade: 46% das crianças de 1ª série deram a resposta correta. Registre-se, no entanto, que praticamente toda a outra metade respondeu “7”, patenteando a dificuldade para lidar com as relações de parte-todo: “Quantas velinhas *a mais* você precisa?” acaba sendo “ouvida” como “Quantas velinhas você precisa?”

Kamii (KAMII e HOUSMAN, 2002) defende para a subtração o mesmo princípio quanto à cotidianidade das situações de adição: crianças pequenas sabem que, ao comerem alguns de seus biscoitos, ficarão com menos biscoitos depois disso. O mesmo ocorre quando perdem figurinhas ao apostá-las com os colegas. Em decorrência, e levando-se em conta as implicações educacionais da investigação cujos principais resultados acabamos de desdobrar, Kamii aconselha a aplicação ocasional de problemas de subtração para crianças de 1ª série sem, no entanto, exigir ou esperar que usem subtração. Desde que elas entendam a lógica da pergunta, muito provavelmente usarão adição para resolvê-la, afinal “Somar é um procedimento muito melhor do que contar para trás, que é difícil de fazer e confuso” (KAMII e HOUSMAN, 2002, p. 114). Essa constatação é produto de várias pesquisas que Kamii e colaboradores realizaram (KAMII, LEWIS e KIRKLAND, 2001 apud KAMII e JOSEPH, 2005), entre as quais destacamos uma realizada com estudantes de 1ª e 4ª séries, aos quais foram submetidos quatro pares de questões (4 + 4 e 8 – 4; 6 + 6 e 12 – 6; 8 + 2 e 10 – 8; 4 + 6 e 10 – 6), com as contas de adição aparecendo no início da entrevista e as de subtração, no final. Os resultados demonstraram que a solidez na adição faz com que a fluência na subtração melhore consideravelmente. Ou seja, se não forem fluentes, por exemplo, no cálculo de 8 + 2, dificilmente o serão em 10 – 8, num claro indicativo de que as crianças deduzem as diferenças a partir de seus conhecimentos das somas.

O principal, no entanto, é que as crianças tenham oportunidade de lógico-matematizar conteúdos do seu cotidiano. Ter entendido isso foi revolucionário na atuação de Leslie Housman (KAMII e HOUSMAN, 2002, pp. 144-145):

> À medida que comecei a procurar matemática durante todo o dia, fiquei impressionada com diversas coisas. Primeiro, eu não podia acreditar em quantas situações levaram naturalmente a uma discussão. Segundo, descobri que essas discussões tomavam muito pouco tempo, mas faziam muito para incrementar nosso programa de matemática. Em seguida, fiquei maravilhada ao ver quão facilmente meus alunos começaram a reconhecer a matemática em suas vidas cotidianas.

Problemas de multiplicação e divisão resolvidos com conhecimentos de adição

Embora defenda problemas matemáticos de multiplicação e divisão para crianças de 1ª série, Kamii (KAMII e HOUSMAN, 2002) não recomenda o ensino dessas operações. Sua justificativa é que, incapazes de pensar multiplicativamente, essas crianças usam adição para solucionar esses problemas. Ou seja, elas inventam seus próprios meios de resolver problemas que tradicionalmente foram pensados como problemas de multiplicação.

Há uma diferença entre o pensamento aditivo e multiplicativo. A estrutura de um problema de adição repetida como 5 + 5 + 5 + 5 é simples, pois envolve apenas unidades em um nível de abstração. Já um problema de multiplicação, como 4 X 5, demanda uma estrutura hierárquica. Para realizar corretamente esta operação, a criança precisa compreender que o “4” em 4 X 5 refere-se a “4 cinco”, além de ser capaz de transformar “5 unidades” em “um cinco”, que é uma unidade de ordem superior (KAMII e HOUSMAN, 2002).

Clark e Kamii (KAMII e HOUSMAN, 2002) comandaram uma pesquisa com 336 alunos de 1ª a 5ª séries nos EUA. Os resultados encontrados evidenciaram a diferença entre pensadores multiplicativos e aditivos. O material empregado era muito simples: três “peixes” do tipo enguia confeccionados em cartolina, com 5, 10 e 15 cm de comprimento, e algumas dezenas de fichas. A técnica consistiu em mostrar à criança que o peixe B comia 2 vezes o que comia o peixe A e que o peixe C, por sua vez, comia 3 vezes o que comia o peixe A. Seguiam-se intervenções do experimentador para demonstrar o quanto determinado peixe era maior ou menor que outro(s). Perguntas deste tipo então eram feitas: “Se este peixe (A) come uma ficha de comida, quantas fichas de comida seriam necessárias para alimentar os outros dois peixes?” A uma resposta incorreta da criança, uma contra-argumentação era formulada, sempre com o cuidado de dizer, por exemplo, “nove é 3 vezes *isto* (fichas de A)” e nunca “nove é 3 vezes *três*”.

O que se chamou de “pensamento multiplicativo com sucesso imediato” foi encontrado em apenas 1,7 e 9,2% das crianças da 1ª e 2ª séries, respectivamente. Com o benefício da contrassugestão, esses percentuais subiram para 17,2 e 35,4%. Um número grande de crianças (53,4 e 43,1%) demonstrou “pensamento aditivo com uma sequência numérica de + 1 ou + 2”: se A recebeu 4 fichas, B deve ganhar 5, e C, 6. O nível que as pesquisadoras denominaram “pensamento aditivo envolvendo + 2 para B e + 3 para C” (13,8 e 10,8%) é bastante instrutivo, pois demonstra que quando as crianças ainda não pensam multiplicativamente, elas têm a tendência a entender “2 vezes” como “mais 2”, e “3 vezes” como “mais 3”.

Esses dados dão mostras eloquentes de que crianças pequenas resolvem problemas matemáticos de “multiplicação” com adição. “Crianças de 1ª série entendem ‘5 pacotes de chicletes e cada pacote contém 6 chicletes’ como 6 + 6 + 6 + 6 + 6, mas não como 5 X 6” (KAMII e HOUSMAN, 2002, p. 120).

As crianças também inventam suas próprias maneiras de resolver problemas de divisão. Quando precisam, por exemplo, dar solução para algo como “João tinha 15 peixinhos e colocou 3 em cada aquário: em quantos aquários João colocou peixinhos?”, muitas delas separam 15 fichas, organizam-nas em grupos de 3 e contam o número de grupos. Se, em vez disso, a divisão é do tipo “partitiva” (“Mamãe tinha 20 morangos. Ela os colocou em 4 caixas, de maneira que em cada caixa havia a mesma quantidade. Quantos morangos mamãe colocou em cada caixa?”), ora as crianças distribuem 20 fichas uma a uma em quatro grupos, ora fazem quatro grupos e, por ensaio e erro, ajustam o número em cada grupo.

A adição repetida, portanto, segundo Kamii (KAMII e HOUSMAN, 2002), é o recurso de que as crianças pequenas (de pré-escola e 1ª série) lançam mão quando têm diante de si problemas matemáticos de multiplicação e divisão. Para descobrir quantos objetos podem ser comprados com 62 reais se cada objeto custa 5 reais, uma criança desenha 62 marcas de contagem, circula 5 delas 12 vezes e conta os círculos, tornando claro que para ela 62 são 62 *unidades*. Outra escreve muitos “5” e, a cada vez, vai dizendo “cinco, dez, quinze...”, interrompendo a escrita ao chegar a “sessenta”. Resta-lhe, então, contar a quantidade de “5”, e é o que ela faz. Ela pensa em 62 como grupos de cinco. Uma terceira criança escreve “5 10 15 20 25... 60”. Observa-se que as duas últimas crianças se aproximam mais do pensamento multiplicativo do que a primeira, embora todas as três tenham usado adição repetida. Em outras palavras, a diferença entre elas não está na lógica, mas no pensamento numérico: a primeira raciocinando ainda por *unidades*, e as outras duas, mais avançadas, raciocinando por *cinco*, denotando um progresso típico que muitas crianças alcançam no decurso do ano escolar da 1ª série.

A propósito, Kamii e Joseph (2005) alertam para o fato de o “escore bruto” de muitos testes de conhecimento matemático mascarar, seja pelas respostas corretas, seja pelas incorretas (quando somente estas e aquelas são levadas em conta), o real sentido de suas operações para as crianças a eles submetidas. Um exemplo do que estamos dizendo pode ser visto no seguinte problema que fazia parte de um teste de que participaram alunos de um grupo construtivista e alunos de um grupo de ensino tradicional de matemática: “A professora trouxe 4 caixas de biscoitos, contendo 23 unidades em cada caixa. Quantos biscoitos há no total para dividir?" (KAMII e JOSEPH, 2005, p. 179). Consideradas somente as respostas corretas de um e outro grupo como elemento de aferição do conhecimento, tem-se o percentual de 61% *versus* 49%. Porém, quando está em verificação a lógica das respostas fornecidas, e não os resultados, a proporção é de 78% *versus* 54% – uma diferença significativa. Isso fica muito claro na resposta do tipo "23 + 23 + 23 + 23 = 52", encontrada no grupo construtivista, em que a lógica estava correta, porém não a resposta. Um erro de lógica que também assinalou a diferença entre os dois grupos (17% no tradicional *versus* 5% no construtivista) foi apresentar a resolução "4 + 23 = 27".

Vale, ainda, destacar que problemas do tipo 62: 5 fazem com que as crianças, ao lidarem desde cedo com o *resto*, compreendam que a viabilidade desse tipo de operação não está na utilização de números que sejam exatamente divisíveis. Aliás, problemas em que as crianças têm que dividir 10 balas entre 4 colegas, ou 7 entre 3, estimulam-nas a inventar frações comuns, como $^1/_4$ e $^1/_3$.

De acordo com Kamii e Housman (2002), como os problemas de divisão demandam um esforço extra na realidade lógico-matemática, é melhor primeiramente habituar os alunos aos problemas de multiplicação, aos quais eles chegam mais facilmente por meio da adição, e somente depois introduzir problemas de divisão.

Conclusão: algumas implicações pedagógicas

Compreender que o nível de abstração da criança determinará a forma como ela representará para si eventos matemáticos é de grande utilidade ao educador em sua tarefa de incentivar o desenvolvimento de seus alunos. Sejam objetos concretos, sejam símbolos escritos, o uso que deles se faz depende do nível de abstração – alto ou baixo – em que a criança se encontra. A tarefa da conservação do número (PIAGET e SZEMINSKA, 1964/1981), como vimos, é um bom exemplo do que se acabou de afirmar: conquanto possuam o conhecimento físico dos objetos das fileiras, algumas crianças não conseguem conservar a equivalência numérica, visto que seu pensamento, ainda pré-lógico, está num nível mais baixo de abstração reflexiva. O mesmo acontece, na mesma tarefa, quando tais crianças não conseguem fazer uma correspondência de um para um tendo diante de si uma fileira modelo.

Em face das evidências trazidas pela teoria de Piaget, bem como pelas implicações pedagógicas e psicopedagógicas dessa teoria que, entre outros, Constance Kamii e colaboradores levaram a efeito em salas de aula, não é difícil concluir que os objetivos do ensino da aritmética devem considerar o "como" as crianças aprendem. Sem isso, elas não serão estimuladas a inventar suas próprias soluções e ficarão à mercê, entre outros aspectos, da imposição de algoritmos adultos, que não servem senão "[...] para reforçar a heteronomia, ou dependência, das crianças e para impedir o desenvolvimento de sua capacidade natural para o raciocínio" (KAMII e JOSEPH, 2005, p. 187), logo para impedir que a aprendizagem se torne fonte de prazer e satisfação.

As contribuições de Kamii corroboram a convicção de Piaget de que as crianças são muito mais motivadas a resolver problemas que afetam diretamente suas vidas, estando dispostas, nesses casos, a um esforço que chega até o limite de suas forças (PIAGET, 1932/1994). Quando têm a oportunidade de "lógico-aritmetizar" a realidade, dirigindo a atenção para atividades de seu interesse, elas são capazes de "[...] reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática" (BRASIL, 1997, p. 29). A aprendizagem terá melhor resultado, e as crianças reconhecerão a matemática como útil e funcional em suas vidas cotidianas se a escola souber potencializar essa capacidade e não limitar o ensino de aritmética à "hora da matemática".

O legado de Kamii também contribui para auxiliar o professor que se vê diante do desafio de ensinar crianças que apresentam dificuldades de aprendizagem, uma realidade cada vez mais presente nas salas de aula da contemporaneidade (CAMARGO, 2002, 2016; ZAIA, 1996; BRENELLI, 1993). Inteirado dos saberes aqui abordados, o professor poderá atuar de forma coerente com os princípios teóricos de Piaget sobre a aquisição do conhecimento lógico-matemático, ou seja, propiciando à criança "[...] a oportunidade de 'reinventar' uma determinada noção a partir de sua atividade própria" (MANTOVANI DE ASSIS e CAMARGO DE ASSIS, 2002, p. 73). Para isso, precisará colocar a criança em situações que desafiem o seu pensamento e, por conseguinte, desencadeiem a necessidade de conhecer, que é inerente à atividade intelectual. Eis a razão pela qual o Parecer CNE/CES 1302/2001 (BRASIL, 2001) indica como fundamentais as seguintes habilidades e competências que o professor de matemática deverá adquirir ao longo de sua formação: raciocínio lógico, postura crítica e capacidade de resolver problemas. E, não menos importante, a "[...] sensibilidade para interpretar as ações do educando" (BRASIL, 2001, p. 3), sem o que o educador não se constituirá como agente da "[...] superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina" (p. 3).

Se a criança encontra um ambiente que lhe ofereça a oportunidade de agir com liberdade e espontaneidade, sua curiosidade poderá ser satisfeita e a impulsionará a inventar, a criar e a ter ideias novas. Garante-se, assim, em boa medida, o cumprimento do direito a que o artigo 26 da Declaração Universal dos Direitos Humanos faz menção: condições favoráveis para a construção dos instrumentos psicológicos que permitam ao indivíduo, ao longo de toda a sua formação, raciocinar com lógica e adquirir uma consciência moral autônoma. Esse direito faz coro com as expectativas das Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (BRASIL, 2013) em relação ao papel da escola, que é o de

> [...] priorizar processos capazes de gerar sujeitos inventivos, participativos, cooperativos, preparados para diversificadas inserções sociais, políticas, culturais, laborais e, ao mesmo tempo, capazes de intervir e problematizar as formas de produção e de vida (BRASIL, 2013, p. 16).

Ora, se tudo o que se refere à escola, conforme as Diretrizes, constitui-se sob o signo da invenção, afinal "[...] os rituais escolares são invenções de um determinado contexto sociocultural em movimento" (BRASIL, 2013, p. 16), não se pode conceber um aluno que não seja agente da construção de seu conhecimento e tampouco uma prática didática, o ensino da aritmética incluído, que não convide à invenção, à curiosidade e ao espírito investigativo. Como recomendam os PCN (BRASIL, 1997, p. 30), "[...] à medida que se redefine o papel do aluno perante o saber, é preciso redimensionar também o papel do professor que ensina Matemática no ensino fundamental." Notável entre os procedimentos dessa nova perspectiva de trabalho, e em consonância com as contribuições de Constance Kamii apresentadas neste artigo, está o favorecimento de um ambiente de trabalho "[...] que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar ideias" (BRASIL, 1997, p. 31). Do que se conclui que os alunos seguirão não sendo estimulados a reinventar a aritmética se os cursos de licenciatura em Matemática desconsiderarem, entre outras, duas expectativas basilares quanto ao processo formativo daqueles que serão os responsáveis por propor, mediar e favorecer os saberes atinentes a essa área do conhecimento:

> [...] desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos; [...] perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente [...] (BRASIL, 2001, p. 4).

Assumimos, tal qual o fizemos em outra oportunidade (CAMARGO; BRONZATTO, 2015), a aposta no lúdico como espaço promissor para o desenvolvimento lógico-aritmético. Trata-se de um lugar inédito para o estudante, que o promove ao centro do processo educativo, não raro ocupado pela sobrevalorização do conteúdo. Nas palavras de Brenelli

(1993, p. 296), “um espaço para pensar”, em consonância com a convicção epistemológica de Piaget de que a conquista de um certo saber, por meio de um esforço espontâneo, levará o aluno a retê-lo muito mais, além de possibilitar “[...] a aquisição de um método que lhe será útil por toda a vida e aumentará permanentemente sua curiosidade, sem o risco de estancá-la” (PIAGET, 1948/1988, p. 54).

Não é senão quando descobre um espaço propício para desenvolver seu pensamento, que a criança, em especial aquela que foi estigmatizada pelas dificuldades em aprender, recebe um investimento significativo em seu autoconceito. Que outra aquisição, nesses domínios, lhe seria mais propícia do que saber “[...] que não está reduzida somente ao que não sabe e mais, aprende[r] que ela é produtora de seu próprio conhecimento”? (MACEDO, PETTY e PASSOS, 2000, p. 27).

Antes de seu contato com Constance Kamii, Linda Joseph (KAMII e JOSEPH, 2005) nunca ouvira sobre a possibilidade de fazer das aulas de matemática algo divertido e empolgante. Mas uma metamorfose se seguiu a esse encontro e ao trabalho que passaram a realizar juntas, principalmente contando com a utilização de jogos: “Agora, nas aulas de matemática, eu vejo empolgação, entusiasmo e concentração na face das crianças. Ouço vozes de crianças autoconfiantes, raramente tímidas e silenciosas somente enquanto pensam” (KAMII e JOSEPH, 2005, p. 165).

Segundo Macedo, Petty e Passos (2005, p. 36), quando se valem dos jogos em seu processo de ensino-aprendizagem, as crianças “[...] envolvem-se com maior facilidade, prestam mais atenção, divertem-se aprendendo e pensando.” Logo, tornam-se agentes de seus próprios conhecimentos, uma evidência, segundo Piaget (1969/1976, p. 176), de que “[...] métodos sãos podem [...] aumentar o rendimento dos alunos e mesmo acelerar seu crescimento sem prejudicar sua solidez.”

Se o que se deseja para as crianças é que sejam capazes de criar, e não apenas de repetir, o professor precisará se render à pedra de toque dos métodos ativos: “[...] compreender é inventar, ou reconstruir através da reinvenção [...]” (PIAGET, 1948/1988, p. 17). Essa também é a convicção de Constance Kamii (KAMII e JOSEPH, 2005): as crianças devem ser estimuladas a inventar suas próprias soluções, e isso não se consegue sem que as metas e objetivos e os modos pelos quais procuramos atingi-los sejam reavaliados. Do contrário, como afirmam Camargo e Bronzatto (2015, p. 74-75),

> os exercícios impostos de fora continuarão submetendo a sua inteligência à medida que impedem o desenvolvimento de sua capacidade natural para o raciocínio, e a criança, sem iniciativa, confiança e autonomia, terá dificuldade para fazer funcionar por si mesma sua razão e construir livremente suas próprias noções. Como consequência, o exercício

> do espírito crítico, como queria Piaget (1948/1988), ficará embotado não só na criança, mas no adulto que ela vier a se tornar.

Se, como afirmam as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a escola, num contexto sociocultural em movimento, existe sob o signo da reinvenção constante (BRASIL, 2013, p. 16), compete ao educador, um reposicionamento quanto ao modo de organizar e orientar o processo de ensino-aprendizagem. O professor, portanto, continua sendo essencial,

> [...] seja quando propõe situações que desafiam o pensamento da criança, seja quando opõe contraexemplos que a conduzem à reflexão, seja quando estimula à pesquisa e à ação intencional, seja, ainda, quando orienta à tomada de consciência e, assim, amplia-lhe o olhar e a compreensão (CAMARGO; BRONZATTO, 2015, p. 75).

Um bom começo para a revitalização das relações e dos processos educativos talvez possa ser procurado na "descentralização" dos mestres. Mas como seria possível estar ao mesmo tempo no centro e se descentralizar? Vejamos. Falamos tanto no egocentrismo infantil e nos processos sociais que favorecem a sua superação, que nem nos damos conta de que, em matéria de educação, acabamos, tantas vezes, reduzindo toda a compreensão do fenômeno ao nosso ponto de vista particular e renunciamos à disciplina que submete o eu às regras de reciprocidade. Assim, como advertiu Piaget (1948/1988), será necessário "[...] que o espírito dos mestres se torne cada vez menos bitolado, sendo às vezes mais difícil obter do mestre essa descentralização que do cérebro dos estudantes" (p. 23). É, aliás, uma certa incapacidade de escutar seu aluno e, em vez disso, uma necessidade de falar por ele, que faz com que o professor nem se dê conta de que "[...] aquilo que o aluno aprende nem sempre corresponde ao que se pretende ensinar" (BRENELLI, 1993, p. 303).

Foi essa a experiência que teve início na atuação profissional de Linda Joseph (KAMII e JOSEPH, 2005), depois de ouvir de Constance Kamii que seus alunos não estavam pensando e receber a sugestão de passar a trabalhar aritmética a partir de situações da vida diária e jogos. Joseph relata que precisou tirar o foco de si mesma como figura principal em torno da qual a vida de seus alunos girava. Passou a pedir ideias às crianças para tarefas simples do cotidiano escolar, em vez de lhes ditar as instruções sobre o que fazer. Em suas palavras, "Esse processo, que Piaget chamou de 'descentralização' desafiou-me a pensar sobre cada situação a partir do ponto de vista da criança, e foi a coisa mais difícil para mim" (p. 160). Mas ela perseverou nessa descoberta. Precisou de muito autocontrole para conter o impulso de escolher o caminho mais rápido e fácil da imposição de seu ponto de vista e dos métodos adultos e, assim, acabou por inventar seu próprio procedimento para estimular as crianças a construírem.

Se as crianças não forem colocadas em situações que desafiem seu pensamento e, por conseguinte, desencadeiem a necessidade de conhecer, que é inerente à atividade intelectual, o produto será uma verdade aprendida. Esta, segundo Piaget (apud MUNARI, 1995), é somente uma meia verdade. A verdade inteira deve ser reconquistada, reconstruída e redescoberta pelo próprio aluno.

Referências

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.142p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 15 julho 2016.

______. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática*, Bacharelado e Licenciatura. Parecer CNE/CES 1.302, de 06 de novembro de 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf >. Acesso em: 07 julho 2018.

______. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 14 julho 2016.

BRENELLI, Rosely Palermo. *Intervenção pedagógica, via jogos Quilles e Cilada, para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldades de aprendizagem*. 1993. 344f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

CAMARGO, Ricardo Leite. *A intervenção pedagógica e o desenvolvimento do raciocínio lógico:* o uso de jogos e atividades específicas para a construção das estruturas lógicas elementares. 2002. 261f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

______. *Intervenção psicopedagógica e dificuldades de aprendizagem matemática*. 2016. 349f. Tese (Livre docência). Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz/ USP, Piracicaba, 2016.

CAMARGO, Ricardo Leite; BRONZATTO, Maurício. Os jogos de regras e sua contribuição para o desenvolvimento lógico-aritmético em crianças. **Schème:** Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. Marília, vol.7, n. 2 – ago/dez. 2015. Disponível em: <file:///C:/Users/Ricardo/Downloads/5780-18711-1-PB.pdf>. Acesso em: 07 julho 2018.

KAMII, Constance; DECLARK, Georgia. *Reinventando a aritmética*: implicações da teoria de Piaget. Tradução Elenisa Curt. Campinas SP: Papirus, 1986.

KAMII, Constance; HOUSMAN, Leslie Baker. *Crianças pequenas reinventam a aritmética*: implicações da teoria de Piaget. Tradução Cristina Monteiro. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2002.

KAMII, Constance; JOSEPH, Linda Leslie. *Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética (séries iniciais)*: implicações da teoria de Piaget. Tradução Vinicius Figueira. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2005.

MACEDO, Lino de; PETTY, Ana Lúcia Sícoli; PASSOS, Norimar Christe. *Aprender com jogos e situações-problema*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

______. *Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar*. Porto Alegre: Artmed, 2005.

MANTOVANI DE ASSIS, Orly Zucatto; CAMARGO DE ASSIS, Mucio (Orgs.). *PROEPRE: Fundamentos teóricos da educação infantil II*. 2 ed. Campinas: Gráfica FE; R. Vieira, 2002.

MUNARI, Alberto. Jean Piaget, in *Construtivismo e Educação*. Orgs. Mucio Camargo de Assis e Orly Z. Mantovani de Assis. Laboratório de Psicologia Genética, FE/UNICAMP, 1995.

PIAGET, Jean. *Biologia e Conhecimento*. Petrópolis: Vozes, 1967/1973.

______. *Psicologia e pedagogia*. Tradução de Dirceu Accioly Lindoso e Rosa Maria Ribeiro da Silva. 4.ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1969/1976.

______. *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*: l'abstraction des relations logico-arithmétiques. Paris: PUF, 1977a (2 vols.).

______. *Piaget on Piaget*. [videotape]. New Haven, CT: Yale University Media Design Studio, 1977b.

______. *Para onde vai a educação?* Rio de Janeiro: José Olympio,1948/1988.

______. *O Juízo Moral Na Criança*. São Paulo: Summus, 1932/1994.

PIAGET, Jean; SZEMINSKA, Alina. *A gênese do número na criança*. Tradução de Christiano Monteiro Oiticica. 3.ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1964/1981.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. *Gênese das estruturas lógicas elementares.* Tradução de Álvaro Cabral. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1959/1983.

ZAIA, Lia Leme. *A solicitação do meio e a construção das estruturas operatórias em crianças com dificuldades de aprendizagem*. 1996. 255f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

Submetido em 19/08/2016, aprovado em 28/11/2018.